

# Mathématique et informatique, aspect didactique

**Luc-Olivier Pochon,**  
IRDP<sup>1</sup>

L'évolution rapide des "nouvelles technologies de l'information" et leur introduction massive dans tous les secteurs de la société, des loisirs à la vie professionnelle, mettent les écoles<sup>2</sup> devant la difficulté de devoir choisir des objectifs prioritaires à poursuivre. Parmi la panoplie des choix possibles, il nous apparaît important d'étudier comment l'intégration de l'informatique aux disciplines permettrait de développer une véritable "culture" informatique qui dépasse l'apprentissage de quelques logiciels de base. Dans ce sens, la mathématique peut apparaître comme une alliée naturelle. Ne pourrait-elle pas contribuer à maintenir des objectifs plus ontologiques dans le domaine de l'informatique? Cette présentation tente de trouver une réponse à cette question en examinant tout d'abord les rapports qu'entretiennent ou ont entretenu mathématique et informatique en relation avec leur enseignement. Nous examinerons aussi les réponses que pourraient apporter la science elle-même ou la recherche en didactique. Finalement, nous proposerons une solution plus centrée sur les situations à résoudre et tenterons de dégager ce que nous appelons des cadres fonctionnels. Cette perspective a également le mérite de revaloriser la mathématique dans certaines écoles, en introduisant des modèles alternatifs à ceux mis à disposition par l'informatique.

## Historique de l'informatique à l'école

Les premiers utilisateurs de l'informatique dans un contexte scolaire étaient souvent des scientifiques, voire des mathématiciens. Mis à part l'EAO, les premières applications, programmation en BASIC et utilisation de LOGO, étaient orientées par la pratique des mathématiques, bien que la composante pédagogique (contexte d'apprentissage, développement de capacités cognitives de base) constituait aussi un pôle important des objectifs poursuivis. Le prosélytisme des précurseurs, lié à l'arrivée en force d'ordinateurs sur les places de travail, et donc l'apparition d'outils "standard", ont favorisé l'intégration de l'ordinateur aux disciplines au prix parfois de certains quiproquos et de déconvenues (les passionnés de programmation se voyant confier des cours d'introduction au traitement de textes, par exemple). Un processus de régulation (coûts/efficacité) ayant joué, on se trouve actuellement dans une période de relative stabilité en ce qui concerne l'informatique<sup>3</sup>, la niche privilégiée se situant principalement au niveau de l'utilisation du traitement de textes et du tableur<sup>4</sup>. Il semble que l'informatique doive se trouver des alliées dans les autres branches et le concept d'intégration mérite d'être analysé soigneusement de

<sup>1</sup> Institut romand de recherches et de documentation pédagogique, cp 54, CH-2007 Neuchâtel.

<sup>2</sup> Aucune école, n'est épargnée. Dans les écoles d'informatique, les enseignants et les responsables doivent sans cesse réaménager cours et curriculum. Dans les écoles non spécialisées dans le domaine, ces transformations rapides, liées à des problèmes d'ordre budgétaire, peuvent parfois remettre en cause l'introduction de l'ordinateur.

<sup>3</sup> En Suisse romande, au niveau primaire, la situation est assez disparate, l'ordinateur est utilisé pour la pratique de l'EAO et dans des pédagogies du projet (journal de classe). Au niveau secondaire inférieur, la situation est plus homogène, tous les élèves reçoivent un cours d'initiation à l'informatique sous diverse formes: pratique du logo, atelier mathématique, utilisation des outils standard. Au niveau des lycées, la tendance est plutôt à la diminution des dotations en informatique alors que l'outil s'intègre de plus en plus fortement dans les formations professionnelles.

<sup>4</sup> Toutefois, les pratiques réelles sont relativement peu connues et une enquête qui va s'effectuer prochainement pourrait montrer une situation beaucoup plus inventive et variée que ce bref constat ne le laisse supposer. Espérons-le.

ce point de vue<sup>5</sup>. La mathématique fait l'objet de cet essai, mais d'autres choix auraient pu être faits.

## **Mathématique et informatique au niveau de la science**

La frontière entre mathématique et informatique est difficile à dresser. Les deux sont des sciences formelles. Elles constituent chacune un réservoir de modèles pour d'autres sciences. La ligne de démarcation est encore plus floue si on se tourne du côté du "grand public": "les mathématiques remplacent les rats" lit-on dans une revue à large diffusion à propos de simulation informatique. Si l'on consulte les mathématiciens, les avis sont fort divers: pour André Delessert, la mathématique commence là où l'informatique finit et les mathématiques doivent, selon lui, marquer ostensiblement ce qui les sépare de l'informatique (Delessert, 1982). Par contre Stephen Wolfram est d'un avis contraire: "il est regrettable que les mathématiques et l'informatique en soient venues à s'opposer intellectuellement alors qu'elles auraient pu être si proches". Cette citation est tirée d'un article de Paul Wellin (1993) de même que la suivante: "en fait, je crois plus à la vérité qu'à la preuve. A mesure que les mathématiques expérimentales se répandront, l'écart entre vérité et preuve en mathématique, augmentera". Face à ces opinions divergentes, il est intéressant de chercher dans l'histoire des traces de la séparation des communautés (selon un processus décrit par Kuhn (1970)). Nous en avons trouvé une, liée à l'Entscheidungsproblem<sup>6</sup>. La réponse à cette question a été apportée par Church et Turing. la mathématique a principalement gardé le nom de Church attaché à ce résultat (avec sa théorie des fonctions récursives) alors que le travail de Turing (qui introduit la "machine" du même nom) est généralement cité comme un texte de base de l'informatique (voir Hodges (1983) à ce propos). On ne peut donc faire abstraction de l'existence de plusieurs communautés scientifiques, se rejoignant sur certains points et s'opposant sur d'autres. Chacune possède son esthétique, son langage, ses habitus. Chacune offre un cadre pour représenter des situations et des outils pour résoudre des problèmes. Sans compter qu'il n'y a pas qu'une informatique, comme il n'y a pas qu'une mathématique. Le recours aux sciences constituées pour dégager des lignes de force dans des actions pédagogiques n'offre pas toutes les certitudes que l'on pourrait espérer.

## **Perspectives didactiques**

En suivant l'école française de didactique des mathématiques, issue de la tradition Bachelardienne et qui fait appel à la psychologie de Piaget, la didactique est la partie de la pédagogie qui s'intéresse à la mise en évidence de concepts assimilables, en organise les progressions d'apprentissage, étudie et utilise les obstacles rencontrés par les élèves, analyse les tâches et rend compte des processus d'apprentissages. Les travaux menés en didactique des mathématiques sont nombreux. Dans leur prolongement, des recherches en didactique de l'informatique ont été menées. La plupart concerne LOGO avec souvent l'étude de l'introduction de la récursivité. D'autres travaux concernent l'introduction de langages de programmation ou d'autres techniques encore. Les actes des rencontres de l'AFDI constituent un recueil riche et intéressant dans le domaine. Malgré l'abondance du matériel, les études mettant en perspective mathématique et informatique sont relativement peu nombreuses. La situation semble donc particulièrement délicate. En

---

<sup>5</sup> Le Centre vaudois de recherches pédagogiques a publié un certain nombre d'études concernant l'intégration au différentes disciplines.

<sup>6</sup> Les trois questions posées par Hilbert en 1928 concernant les bases des mathématiques et qui reprenaient une question plus ancienne, concernaient la complétude des mathématiques (chaque proposition peut être prouvée ou écartée), leur consistance (aucune proposition peut être à la fois vraie et fausse) et leur décidabilité (existe-t-il une méthode qui permette de produire une décision correcte concernant la véracité d'un proposition?). Goedel montrait (contrairement à ce que croyait Hilbert) que la mathématique n'est pas complète et que leur consistance ne peut pas être prouvée. Restait la troisième question qui a été abordée (en définissant un processus constructif) par Church et Turing.

particulier, les recherches concernant l'apport de l'informatique dans l'apprentissage de certaines notions (notion de variable, par exemple) n'apportent que des réponses mitigées. Les transferts d'une pratique à l'autre ne se font pas naturellement; ce qui peut expliquer le nombre assez limité de travaux mêlant les deux approches<sup>7</sup>. Janine Rogalski (1990) a posé clairement la question de l'imbrication de la didactique de l'informatique et celle des mathématiques. En particulier, sur la base de particularités communes des mathématiques et de l'informatique, elle propose de définir des situations didactiques permettant aux apprenants de co-construire des connaissances en mathématiques et en informatique. Ceci nous amène à notre propos.

## **Recherche de situations significatives**

Il convient maintenant de se tourner vers les propositions pédagogiques d'intégration. Si d'une manière générale, nous sommes sensible au contexte, tel que le décrit Jean Zahnd (1992), notre perspective sera plus limitée. Elle concernera la mise en évidence de cadres fonctionnels, c'est-à-dire de grandes classes de problèmes qui revêtent un intérêt social particulier et qui introduisent des techniques de résolution de problème utiles (Pochon, 1983). B. Vitale (voir Vitale (1994) pour une bibliographie à ce propos) propose dans ses divers "cahiers" des laboratoires qui poursuivent en grande partie les mêmes buts (voir aussi Ferrario, 1992). Les catégories que nous proposons sont un peu moins ambitieuses. Elles ont toutefois été choisies en vertu d'un triple critère: intérêt mathématique, intérêt informatique et relevance sociale.

Chaque catégorie est située à l'aide d'un problème prototypique. La plupart d'entre eux, ont été utilisés dans des cours de formation continue (formation de programmeurs-analystes). Les participants à ces cours ont une certaine habitude de l'ordinateur, mais n'ont que des notions rudimentaires en programmation dans la mesure où leur formation est de plus en plus centrée sur l'usage, en informatique de gestion, de modèles de traitement de données. Dans les écoles d'informatique, les mathématiques ont un statut de culture générale, vaguement reconnu. La démarche est donc introduite avec un but supplémentaire: celui d'offrir des modèles alternatifs pour représenter des problèmes, les conceptualiser et les traiter.

A noter à titre accessoire que la mathématique numérique a remis en cause certaines théories et outils de calcul tels que ceux liés à la théorie classique des déterminants. L'alternative se présente sous la forme d'une économie de formulation contre une économie de temps de calcul. Toutefois, les techniques de programmation parallèle ou symbolique remettent en selle des méthodes et des théories qui semblaient vouées à l'oubli.

Voici quelques catégories retenues:

### ***Optimisation, ajustement de courbes***

les situations dans cette catégorie sont souvent faciles à résoudre à l'aide de quelques lignes de programmation. L'expérience montre que les résultats obtenus sous forme graphique poussent les apprenants à en comprendre la raison et les incitent à trouver des méthodes plus synthétiques<sup>8</sup>.

*Dans un théâtre le prix des places est fixé à 8 \$. Pour une représentation on attend 500 spectateurs. On estime que chaque fois que l'on baisse le prix de 25 cts, 50 personnes de plus*

---

<sup>7</sup> Les actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (Laborde, 1988) séparent nettement les travaux concernant la mathématique de ceux de l'informatique, une méthodologie commune assurant toutefois une certaine cohérence à l'ensemble.

<sup>8</sup> Les brefs commentaires sont établis à partir de protocoles établis par les apprenants selon quatre points: 1) Essais, discussion; 2) Choix des moyens, plan; 3) Démarche et solution; 4) Evaluation, critique. Des documents de travail sont disponibles qui présentent les résultats de façon plus détaillée.

viendront voir le spectacle. A combien faut-il fixer le prix de la place pour assurer un revenu maximum ? (On suppose dans un premier temps que le nombre de place est illimité).

### Matrices et société

Il s'agit du domaine des processus linéaires qui constituent un modèle utile pour représenter et étudier des phénomènes économiques et sociaux (Bradley, 1986). Il utilise un outil élégant: le calcul matriciel. Les rapports entre ce calcul et l'informatique sont divers: reconnu comme un outil conceptuel important par le langage APL, il permet de bien synthétiser un problème et de conserver des invariants. Il est utilisé dans les OCR, les systèmes de dessin assisté par ordinateur, etc. Toutefois, la programmation a tendance à le faire disparaître: programmer une multiplication matricielle ou un système de transformations linéaires revient au même. Par ailleurs, de nombreux résultats (formules de Cramer, par exemple) demandent par trop de détours et sont trop onéreux en temps de calcul. Toutefois, les systèmes formelles et la programmation "parallèle" augmentent le nombre de résultats que l'on peut transposer directement.

Une usine comprend deux secteurs A et B. Les capitaux initiaux des secteurs A et B sont 70 MFrs et 30 MFrs. Grâce à son revenu, à la fin de chaque année, le secteur A peut réinvestir et augmenter son capital de 60%. Par ailleurs, il peut investir une somme représentant le 20% de son capital dans le secteur B. Le secteur B investit chaque année une somme représentant 70% de son capital dans le secteur A. ( $x_n$  représentera le capital de A l'an  $n$  et  $y_n$  sera celui de B).

Représentez l'évolution à l'aide du calcul matriciel et étudiez en fonction du temps:  $s_n = x_n + y_n$  (capital total);  $v_n = s_n / s_{n-1}$  (croissance);  $r_n = x_n / y_n$  (importance relative de A et B).

Actuellement, un outil disponible pour effectuer ce travail est DERIVE. Une première difficulté rencontrée concerne les limites assez floues des performances du système. Il accepte des notations erronées (matrice à la puissance une matrice, multiplication d'une matrice 2x2 par une matrice 1x2, etc.). Il faut aussi "l'aider" à simplifier littéralement l'élévation à une puissance d'une matrice diagonale, etc. Il est nécessaire que les élèves trouvent une méthode pour garder une vue d'ensemble des calculs effectués. Par ailleurs, la programmation de fonctions constitue, en soi, un exercice difficile bien que très intéressant (utilisation de la récursivité ou de l'itération d'une application).

### Images et sons

Les images et les sons sont à l'ordre du jour dans le monde de l'informatique avec, à la clé, des algorithmes de compression de données, la génération d'images et de sons de synthèse. Des modèles simples existent qui permettent de montrer le lien important que informatique et mathématique, même classique, entretiennent à ce propos: algorithme de compression de Fibonacci-delta, utilisation d'objets fractals, etc. "Engagez Fibonnaci" aurait ordonné un dirigeant d'IBM apprenant que des ordinateurs concurrents étaient plus performants que ceux de sa firme.

Le problème prototypique proposé ici, introduit la méthode "Iterated Function System" (IFS) qui offre un moyen de stocker des images avec un rapport de compression très élevé. Cette technique est basée sur la production d'images fractales (Barnsley, 1988).

Représentez dans le plan tous les points obtenus en itérant l'application  $y = Wx+v$

$$W = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad v = \begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$$

Algorithme:  $x_0$  point de départ

$x := x_0$

Répéter

choix de  $W$  et  $v$  selon les probabilités indiquées

$x' := Wx + v$

dessin de  $x'$

$x := x'$

Paramètres pour obtenir le triangle de Sierpinski

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
0,5	0	0	0,5	0	0	1/3
0,5	0	0	0,5	1	0	1/3
0,5	0	0	0,5	0,5	0,5	1/3

C'est une activité qui apparaît magique et qui se révèle très motivante. Il est toutefois difficile de donner une explication satisfaisante du phénomène. C'est l'occasion pour chacun de se trouver des heuristiques convaincantes.

### **Combinatoire, théorie des nombres (jeux sur les nombres)**

Ce cadre fonctionnel permet d'exploiter une propension naturelle de la nature humaine pour les casse-tête et puzzles divers en stimulant ainsi les capacités d'invention (à la recherche du "ha ha" de Gardner).

Les deux situations sélectionnées n'ont pas encore été expérimentées. La première pose le problème intéressant de trouver un système de codage d'objets tridimensionnels. La deuxième demande pour prétendre à une certaine efficacité, de trouver des bornes aux solutions et de privilégier la combinatoire au calcul.

*Combien y a-t-il de pentacubes non superposables? Un pentacube (pentamino de l'espace) est un solide constitué de cinq cubes (unitaires), de telle manière que tout cube possède au moins une face commune avec un autre cube. Deux cubes ne peuvent pas avoir d'autres éléments en commun qu'une face, une arête ou un sommet.*

*Trouvez tous les entiers naturels égaux à la somme de leurs chiffres élevés à la puissance  $n$ . L'ensemble des entiers satisfaisant la propriété pour un entier  $n$  sera noté  $S_n$ .*

*Exemple:  $153 \in S_3$  car  $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$*

### **Codage**

Le codage de l'information est un thème qui peut donner lieu à de nombreuses activités: traitement du contenu informationnel, correction des erreurs, cryptage, etc. Un des intérêts d'utiliser l'ordinateur pour ces activités est de montrer les contraintes qu'implique le passage des principes de base à des applications pratiques (temps de calcul, entre autres). L'exemple des techniques à clef révélée montre une utilisation commerciale des nombres premiers. Cet exemple est traité en détail dans Pochon (1994). Il met en évidence, à côté des problèmes techniques (la recherche de nombres premiers), de nouveaux problèmes psycho-cognitifs (utilisation de grands nombres).

## ***Simulation***

C'est un domaine relativement complexe, si l'on se réfère aux nombreuses facettes qu'il recèle: diversité des modèles, aspects psycho-pédagogiques, outils à disposition (Vitale, 1994). La plupart des jeux de simulation (Sim City) offrent l'accès à certains paramètres, mais cachent malheureusement les modèles utilisés. En voulant partir des fondements des phénomènes (forces plutôt que équation différentielle) un travail de 'programmation' (avec LOGO, par exemple) plus important reste à effectuer (Launaz, Pochon, 1985).

## ***Instruments de calcul***

Ce domaine est particulier dans la mesure où il concerne tous les autres. On peut lui donner une spécificité en discutant le cas de la calculatrice au niveau de la scolarité obligatoire où l'enjeu entre le travail à la machine ou "de tête" ou "à la main" est particulièrement bien marqué.

## ***Outil, symbole, intelligence***

La question des modes de pensée n'est pas nouvelle. Avec l'arrivée de l'ordinateur, la question de connaître l'influence de la machine sur l'esprit de l'homme a été posée par de nombreux cercles. Les artefacts qui mêlent l'esprit de l'homme à la matière éveillent des craintes et espoirs, ils ouvrent des possibilités pour certains, seront source de réduction pour d'autres.

Or des éléments de réponse ou des cadres scientifiques pour étudier le problème existent. Ils sont même relativement assez accessibles<sup>9</sup> si l'on se réfère à l'oeuvre du psychologue Vygotsky (voir par exemple: Schneuwly, Bronckart, 1985) qui montre, en référence à d'autres travaux, que le développement des capacités cognitives est lié à l'intériorisation d'outils sémiotiques forgés par l'usage social. Le langage est un tel outil<sup>10</sup>. D'abord cri, cet outil a été domestiqué pour devenir un mode de communication, puis par intériorisation, un outil de pensée. Le langage des formules en fournit un autre<sup>11</sup>. L'ordinateur par les langages de programmation, la syntaxe des langages de commande, les schémas de manipulation d'icônes fournit donc des outils qui influencent les processus de pensée<sup>12</sup>.

Il est intéressant d'étudier la simple calculatrice de ce point de vue. F. Conne et J.-M. Favre (1993), en suivant le modèle de Vergaud (1981), ont donné à la calculatrice le statut de langage. Et, de fait, tous les travaux réalisés avec des calculatrices ont montré qu'elle n'est de loin pas le substitut, l'outil de paresse qui est souvent l'image qu'on en donne. Pour de jeunes élèves (entre 10 et 11 ans) les parenthèses de la calculatrice ne sont pas celles de leur livre de mathématique, la problématique de la vérification d'un résultat n'est pas la même que l'on dispose d'une calculatrice ou pas. Elle nécessite donc des apprentissages propres. Ce n'est pas un outil didactique dont l'utilisation va de soi! Il en découle que l'introduction d'outils de calcul ne peut pas constituer qu'une demi-mesure. L'école ne devra-t-elle, pas choisir comme elle l'a déjà fait en remplaçant les bouliers par des algorithmes de calcul?

## **Conclusion**

---

<sup>9</sup> Les personnes intéressées trouveront des développements et une bibliographie dans: Grossen, M., Pochon, L.-O. (1993) Interactional perspective on the use of the computer and on the technological development of a new tool: the case of word processing. In: Pontecorvo, C., Resnick, L., Säljö, R. *Discourse, tools and reasoning and technologically supported environment*. Proceedings of the NATO Advanced Workshop Lucca (Italy), November 2-7 1993.

<sup>10</sup> On pourra aussi se référer aux travaux de B.L. Whorf (1956) à ce propos.

<sup>11</sup> Il vaudrait la peine de réexaminer certains apprentissages du calcul formel en regard de cette théorie qui explique les difficultés des élèves liées à des conventions dont il est difficile de leur faire revivre la genèse.

<sup>12</sup> Dans cette théorie les transferts sont réduits à une portion congrue ce qui correspond bien au constat général !

Il est difficile de situer la science informatique: science du traitement rationnel de l'information? Science de l'ordinateur? On assiste à l'émergence d'une mathématique expérimentale. Mais l'informatique mathématique apparaît aussi de plus en plus importante avec l'apparition des systèmes symboliques. Comment les écoles peuvent-elles tenir compte de cette évolution? Une proposition serait de centrer les curriculums sur des cadres fonctionnels, c'est-à-dire des classes de problèmes importants du point de vue de leur contenu, leur histoire etc. Toutes les implications de cette proposition n'ont de loin pas encore été entrevues.

## Références

Barnsley, M.F., Sloan, A.D. (1988) A Better Way to Compress Images. *Byte*.

Bradley, I. Meek, R.L. (1986) *Matrices and Society*. Harmondsworth: Penguin Books.

Delessert, A. (1982) Les mathématiques face à l'informatique. In: *Visages de l'informatique*. Lausanne: Payot, Publication de l'Université de Lausanne.

Favre, J.-M. (1993) Utilisation de la calculette dans la formation du concept de multiplication dans l'enseignement spécialisé. *Math-Ecole No 156*, janvier 1993.

Ferrario, M. (1992) *Activités LOGO*. Bienne: Ecole normale.

Hodges, A. (1983) *Alan Turing, the Enigma of Intelligence*. London: Counterpoint.

Kuhn, T.S. (1970) *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, C. (Ed.)(1988) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Editions de la Pensée Sauvage.

Pochon, L.-O. (1983) Vers la définition de cadres fonctionnels pour l'enseignement mathématique. In: Perret, J.-F. *Mathématique et réalité: regard sur le contenu des activités mathématiques à l'école primaire*. Neuchâtel: Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques.

Pochon, L.-O. (1985) *Quelques projets pour Logo*. Publication du groupe pour une utilisation didactique de l'ordinateur. Neuchâtel: Centre professionnel du littoral neuchâtelois.

Pochon, L.-O. (1994) A propos de codage. *Bulletin No 17*, avril 1994. Neuchâtel: Société des enseignants neuchâtelois de sciences.

Rogalski, J. (1990) La didactique de l'informatique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 9/3. p 407-425.

Rossion, P. (1982) Les maths remplacent les rats. *Science & Vie*.

Schneuwly, B., Bronckart, J.P. (Eds.)(1985) *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, textes de base en psychologie.

Vergnaud, G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.

Vitale, B. (1994) Modélisation qualitative et quantitative. Un exemple d'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique: les bases de la pensée écologique. *Bulletin No 17*, avril 1994. Neuchâtel: Société des enseignants neuchâtelois de Sciences.

Wellin, P. (1994) Un entretien avec Stephen Wolfram. *Bulletin 64*. Société suisse des professeurs de mathématique et physique. L'article original en anglais a paru dans la revue *Mathematica in education*, Vol 2, No 2.

Whorf, B.,L. (1956) *Language, Thought and Reality*. Cambridge: MIT Press.

Zahnd, J. (1992) Enseignement de l'informatique et contextualisation scolaire. *Actes de la troisième rencontre francophone de didactique de l'informatique*. Paris: EPI.