

# ACTIVITÉS POUR LES CLASSES DE SIXIÈME ET DE CINQUIÈME SUR LA SYMÉTRIE CENTRALE ET LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Elisabeth GALLOU, Edgar MARKA

## I. INTRODUCTION

La symétrie orthogonale et la symétrie centrale sont deux transformations étudiées au collège pour lesquelles il convient de déterminer l'image d'un angle.

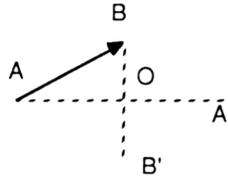
La symétrie centrale conserve les angles en mesure et en orientation, la symétrie orthogonale les conserve en mesure mais pas en orientation.

Ces deux transformations planes sont en fait la restriction à un plan de transformations de l'espace. Pour la symétrie orthogonale il s'agit d'un demi-tour autour d'une droite, pour la symétrie centrale d'une symétrie point de l'espace. Elles correspondent à des phénomènes de la vie courante : le miroir pour la symétrie orthogonale, le faisceau de rayons lumineux convergent en un point puis se dispersant pour la symétrie centrale.

Quand la transformation de l'espace conserve l'orientation de l'angle d'un trièdre (demi-tour par rapport à une droite) la transformation plane déduite, la symétrie orthogonale, ne conserve pas l'orientation de l'angle dans le plan.

Quand la transformation de l'espace ne conserve pas l'orientation de l'angle d'un trièdre (symétrie point) la transformation du plan déduite, la symétrie centrale, conserve l'orientation de l'angle dans le plan. Cette conservation de l'angle vient de ce que les demi-droites changent d'orientation :

$$\begin{aligned} \vec{A'B'} &= -\vec{AB}, \\ \vec{C'D'} &= -\vec{CD}, \\ \text{donc } (\vec{A'B'}, \vec{C'D'}) &= (\vec{AB}, \vec{CD}). \end{aligned}$$



La géométrie dans la situation de classe habituelle a pour instruments essentiels la règle et le compas. Le seul instrument concernant les angles est le rapporteur, peu utilisé et peu maîtrisé par les élèves, et de toutes façons il ne rend pas compte de l'orientation.

L'arrivée de nouveaux programmes en classe de sixième avec une introduction de la symétrie orthogonale dès cette classe nous a conduit à concevoir et réaliser des activités pour l'apprentissage de la symétrie orthogonale où l'élève soit amené à résoudre un problème d'orientation pour déterminer le symétrique d'un angle. Ce problème d'orientation est celui de la conservation du sens des angles qui différencie la symétrie par rapport à une droite des translations et de la symétrie par rapport à un point.

Cela suppose la prise en compte de la notion d'angle orienté. La définition formelle de cette notion ne pouvant pas être donnée à ce niveau scolaire, L'utilisation d'un dispositif particulier s'avère nécessaire. Dans les conditions "papier crayon" habituelles, les propriétés d'incidence et les reports de longueur sont favorisés mais la détermination des angles est presque toujours absente. Même quand il y a utilisation du rapporteur, le sens des angles n'est jamais précisé par les élèves.

Un environnement dont l'usage est suggéré par les nouveaux programmes est celui réalisé par un micro-ordinateur associé au langage LOGO.

Si on se limite à la liste de commandes suivantes : AV n, RE n, TD n, TG n, où n est un entier, ORIGINE, LC, BC, VE, CT, MT, GOMME et FINGOMME, dans la construction de figures polygonales l'élève doit donner à chaque sommet une commande TD n ou TG n qui lui fait préciser la mesure et le sens de l'angle de la figure : la notion d'angle orienté est ainsi introduite. Les activités proposées ici reposent sur l'utilisation d'un tel dispositif.

En effet dans les activités de construction de symétries par rapport à des droites de figures polygonales données sur l'écran du micro-ordinateur avec les commandes LOGO indiquées précédemment, les

élèves sont contraints de déterminer les angles de la figure symétrique en indiquant à la fois la mesure et le sens. Cette contrainte ne vient pas de consignes extérieures qui peuvent ne pas être respectées mais du dispositif utilisé (micro-ordinateur avec langage LOGO), ce qui la rend incontournable.

Les activités proposées ici reposent aussi sur une comparaison entre les tracés de l'élève et ceux d'une correction préenregistrée, et sur la nécessité pour les élèves de faire un nouvel essai de tracé en cas de non concordance de la figure qu'il a faite avec celle de la correction ; ce nouvel essai a lieu sans que l'élève conserve la correction présente à ses yeux. L'existence de ces corrections et essais repose elle aussi sur l'utilisation du micro-ordinateur.

## **II. CHOIX DES ACTIVITÉS ET DES CONSIGNES POUR LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE.**

### **1) Introduction**

Ces activités se veulent des activités d'introduction de la symétrie orthogonale pour les élèves en classe de 6<sup>ème</sup>, les seules indications à donner étant les fiches de langage, fiches de travail et dessins des figures. Les séances de récapitulation des propriétés de la symétrie orthogonale ont lieu après ces activités. Cependant ces activités peuvent être utilisées aussi comme des révisions plus ou moins longtemps après un enseignement portant sur la symétrie orthogonale.

Les consignes sont les suivantes : les élèves travaillent par paires devant le micro-ordinateur. Ils reçoivent des feuilles de papier sur lesquelles les figures et les axes sont tracés. Un des élèves de la paire tape les commandes sur le clavier du micro-ordinateur, L'autre les écrit sur une feuille de papier. Quand les élèves pensent avoir terminé le tracé de la figure symétrique, ils appellent la correction. A ce moment on dit qu'ils terminent un essai. Si leur tracé ne coïncide pas avec la correction ils doivent faire un nouvel essai jusqu'à concurrence de trois essais. Si au troisième essai le tracé est toujours inexact, les élèves doivent lire et noter les commandes réalisant le tracé exact, puis les taper au clavier.

### **2) Variables et choix des figures**

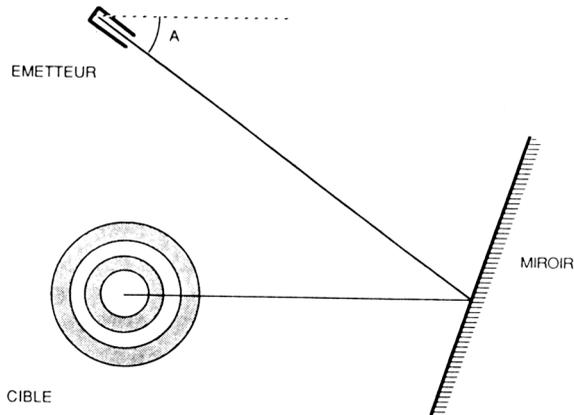
Différents types de tâches ont été choisis. Les premières tâches sont des tâches de tracé de symétriques d'une figure.

A partir d'une étude des procédures susceptibles d'être utilisées par un élève pour le tracé de figure symétrique (voir tableau joint), les figures sont choisies avec la stratégie suivante : les procédures dont la disparition est souhaitée sont d'abord favorisées dans un cas où elles conduisent à un résultat erroné. La confrontation avec la correction conduit les élèves à mettre en œuvre d'autres procédures.

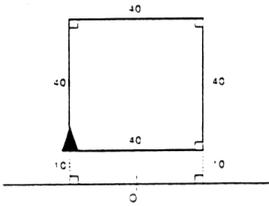
Nous faisons l'étude des variables de la tâche et nous choisissons des figures de façon à ce que les valeurs des variables induisent certaines procédures (voir tableau des variables et figures).

Les tâches suivantes sont :

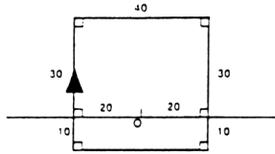
- \* des tracés de rayon réfléchi connaissant le rayon incident et le miroir (REF 1, 2, 3, 4, 5) ;
- \* des reconnaissances d'axes de symétrie (MAISON C,D,E) ;
- \* des jeux dont l'un est indiqué ci-dessous :



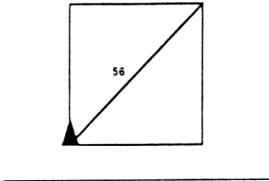
**CARREA** : la tortue a sa pointe dans la direction verticale



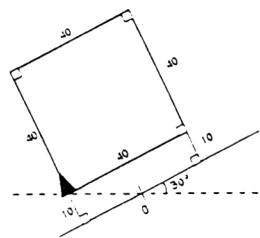
**CARREC** : la tortue a sa pointe dans la direction verticale



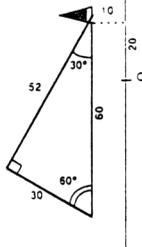
**CARREB** : les indications sont les même que pour CARREA



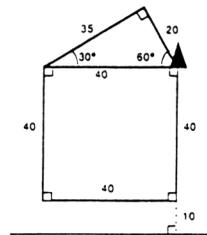
**CARRED** : la tortue est a un sommet du carré dans la direction d'un côté



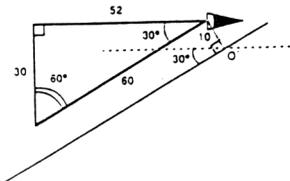
**TRIANGLEA** : la tortue est au sommet de l'angle de 30° dans la direction horizontale



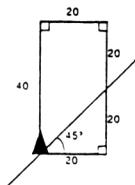
**MAISONA** : la tortue est au sommet du triangle à l'angle de 30° avec sa pointe dans la direction verticale



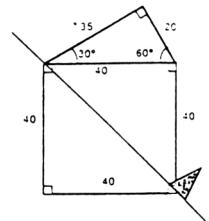
**TRIANGLEB** : la tortue est au sommet de l'angle de 30° avec sa pointe dans la direction horizontale



**RECTANGLEA** :



**MAISONB**



### III. CHOIX DES ACTIVITÉS ET DES CONSIGNES POUR LA SYMÉTRIE CENTRALE

#### 1) Introduction

La symétrie centrale est une transformation qui change l'orientation d'un solide dans un espace de dimension 3, et dans un plan transforme une figure en une figure superposable. La conservation des angles semble un des points essentiels de cette notion. Il nous a semblé judicieux d'établir des activités qui par leurs consignes, la forme des figures, leur dispositif sont semblables à celles réalisées pour la symétrie orthogonale pour permettre à l'élève d'établir des mises en relation des deux notions pour amener à déterminer la spécificité de chacune d'entre elles. La détermination du symétrique d'un angle nous semble l'activité fondamentale pour la symétrie centrale comme pour la symétrie orthogonale.

Nous avons donc choisi un dispositif identique à celui des activités de la symétrie orthogonale : micro-ordinateur avec liste restreinte de commandes LOGO.

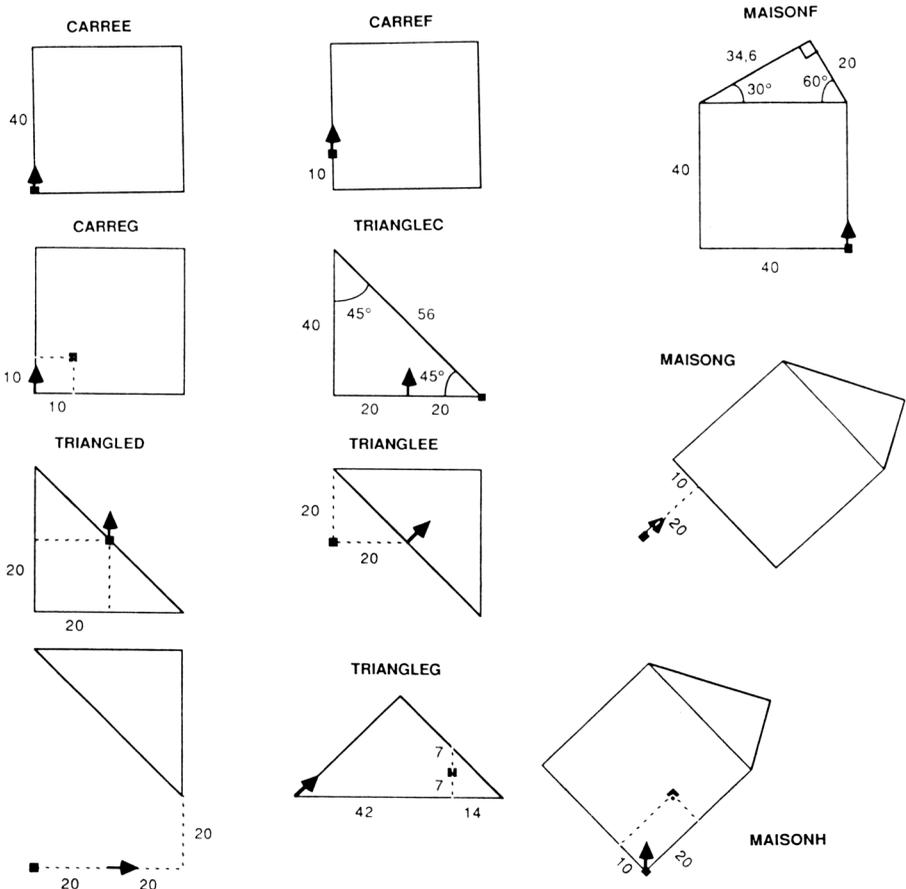
Les tâches sont des tâches de construction de figures symétriques de figures données, le centre de symétrie étant donné et la tortue placée en un point de l'écran.

#### 2) Variables et choix des figures

Trois variables principales apparaissent : la variable figure, liée aux seules propriétés de la figure, la variable position du centre de symétrie, la variable position initiale de la tortue. Les figures choisies sont des figures fermées constituées de segments juxtaposés comme pour la symétrie orthogonale. La variable figure nous semble donc caractérisée par le nombre de segments et la variable angle droit qui prend la valeur vrai si la figure ne comporte que des angles droits.

La variable position du centre de symétrie se partage en trois sous variables suivant que celui-ci appartient au contour de la figure, lui est intérieur ou lui est extérieur. Dans le cas où le centre de symétrie appartient au contour, nous avons une sous variable sommet qui prend la valeur vrai si le centre de symétrie est placé en un sommet de la figure et la sous variable milieu d'un segment qui prend la valeur vrai si le centre est au milieu d'un segment de la figure.

La variable tortue se sépare en quatre sous variables qui sont les suivantes : la variable position du centre de symétrie, la variable position d'un sommet de la figure, la variable position du milieu d'un segment de la figure, la variable parallélisme ou orthogonalité à un segment de la figure qui prend la valeur vrai si la direction de la tortue est initialement parallèle ou perpendiculaire à un segment de la figure. Les figures sont les suivantes :



## IV. COMPTE-RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION

### 1) Pour la symétrie orthogonale

L'expérimentation a eu lieu dans deux classes de 6ème et une classe de CM2. Le plus intéressant est d'étudier les procédures et les erreurs concernant le tracé des figures symétriques.

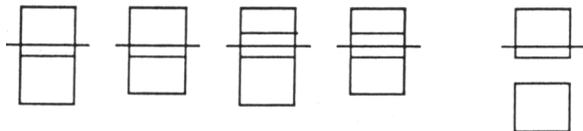
Pour tracer le symétrique de CARREA presque tous les élèves donnent le groupe de commandes : GA 180 LC AV 20 BC AV 40 puis 3 fois GA 90 AV 40.

Cela provient d'une difficulté à utiliser la commande recule. La seule erreur est celle des lignes de liaison qui consiste à tracer effectivement les lignes de rappel.

Certains élèves les ont effacés avant d'appeler la correction, d'autres n'ont pas reconnu d'erreur à la correction mais ne les ont pas tracées pour la figure suivante. Pour une paire d'élèves a eu lieu une erreur d'identification : au premier essai les élèves ont retracé le carré. Ils ont reconnu leur erreur à la correction.

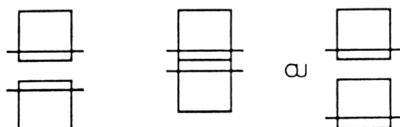
Pour CARREB 80% des élèves ont tracé la mauvaise diagonale alors que pour le tracé du carré ils avaient repris leur tracé de CARREA et se trouvaient au moment de tracer la diagonale placés à une extrémité de la bonne diagonale. Ceci témoigne de la force de la conception du déplacement (la figure image est superposable à la figure objet) chez les élèves.

Pour CARREC les erreurs ont été variées au premier et même au deuxième essai. Ce sont les erreurs suivantes :



La dernière erreur est une répétition des commandes de CARREA. Les autres erreurs proviennent de l'utilisation par les élèves du théorème en acte suivant "la figure symétrique est entièrement d'un côté de l'axe de symétrie". Dans certaines de ces erreurs le symétrique du côté inférieur du carré est tracé exact. Ces erreurs ont lieu au deuxième essai. Les élèves ont vu la correction et connaissent l'existence de ce segment dans le symétrique. De plus la tortue est placée initialement à une extrémité. Ils tracent un segment mais ensuite ils réalisent un carré

entier d'un côté de l'axe de symétrie (carré accolé à l'axe ou au carré objet). Au troisième essai il n'y a pas eu d'erreur. Ceci nous montre que les élèves ont une vision globale du symétrique de la figure, ce que nous cherchions à obtenir. Cela montre aussi la persistance de certaines conceptions telles celle de la vision du symétrique dans un demi - plan limité par l'axe de symétrie. On remarquera qu'il n'y a pas de doublement de l'axe de symétrie. Les erreurs suivantes, observées dans les conditions papier crayon ne se produisent pas ici :



Cela témoigne d'une bonne différenciation figure objet axe de symétrie créée par le dispositif.

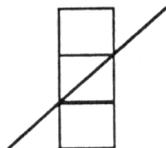
Pour CARRED il n'y a pas eu d'erreur. Cela provient de ce qu'en fait la présence d'un axe oblique ne présente de difficulté que si la figure présente des segments autres qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à l'axe de symétrie, ou si la tortue en position initiale est perpendiculaire ou parallèle à l'axe de symétrie. Ici en fait les commandes sont une répétition de celles de CARREA.

Pour TRIANGLEA la seule erreur relevée est celle de l'échange des angles de  $30^\circ$  et  $60^\circ$  provenant d'un désir de réaliser une figure symétrique superposable à la figure objet. Cette erreur est commise par un quart des élèves.

Pour TRIANGLEB les erreurs concernent les lignes de rappel horizontales ou verticales au lieu d'être perpendiculaires à l'axe et encore l'échange des angles de  $30^\circ$  et  $60^\circ$  mais seulement pour deux paires d'élèves sur douze paires.

Il n'y a pas eu d'erreur pour MAISONA. On a accolé un triangle présentant les mêmes choix pour les variables que TRIANGLEA et un carré présentant les choix de CARREA.

Pour RECTANGLEA il y a eu une seule erreur, commise par la moitié des élèves :



Les élèves tracent le symétrique du rectangle par rapport à un axe imaginaire similaire à celui de CARREC. Cependant on remarque qu'il n'y a pas doublement de l'axe de symétrie.

Pour les REF il y a eu peu d'erreurs ; celles-ci correspondent à des erreurs de calculs d'angles et ne sont pas liées à des conceptions erronées de la symétrie orthogonale. La transposition correspondant à la réalisation de la symétrie par rapport à un axe non tracé ne semble pas présenter de difficultés.

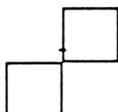
Pour les axes de symétrie, il n'y a pas eu d'erreurs sur la fiche exercice. Pour MAISONC et MAISOND la moitié des élèves ont tracé un axe de symétrie. Il n'y a pas eu d'erreur pour MAISONNE.

Les deux types de jeux ne présentent pas de difficultés pour les élèves après la progression des figures. Ces deux dernières activités sont des activités motivantes que les élèves demandent à recommencer.

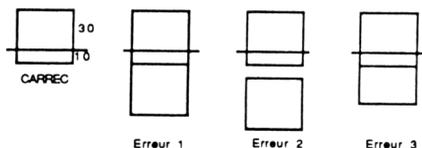
## 2) Pour la symétrie centrale L'expérimentation a eu lieu dans trois classes :

- \* une classe de cinquième (12-13 ans) ayant réalisé la séquence sur la symétrie orthogonale l'année précédente ;
- \* une classe de cinquième ne l'ayant pas réalisé ;
- \* une classe de sixième venant de réaliser la séquence sur la symétrie orthogonale.

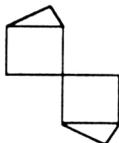
Le CARREE ne comporte pas d'erreur. Le CARREF comporte l'erreur suivante :



Cette erreur est analogue aux erreurs réalisées pour la symétrie orthogonale pour CARREC qui sont les suivantes :



Pour MAISONF on trouve comme erreur :



qui correspond à l'erreur d'orientation. On remarque que pour MAISONH cette erreur ne se retrouve que faiblement ce qui indique la présence d'un apprentissage. La classe où on trouve le plus d'erreurs en début de séquence est la classe de cinquième n'ayant pas réalisé la séquence sur la symétrie orthogonale précédemment. Les deux autres classes ont des résultats assez semblables avec cependant plus de rapidité et légèrement moins d'erreurs dans la classe de cinquième ayant réalisé la séquence sur la symétrie orthogonale l'année précédente. En fin de séquence les réalisations des élèves des trois classes se rapprochent et les évolutions au cours de la séquence sont de même type en laissant cependant subsister une différence sensible entre la classe n'ayant pas réalisé la séquence sur la symétrie orthogonale et les deux autres.

Cela nous montre l'importance de l'établissement par l'élève de mises en relation des deux notions : la symétrie orthogonale et symétrie centrale.

## V. CONCLUSION

Des résultats similaires sont trouvés pour le déroulement de la séquence dans le cas de la symétrie centrale et dans le cas de la symétrie orthogonale. Nous notons cependant que la meilleure maîtrise des notions a lieu chez les élèves ayant effectué la séquence sur la symétrie orthogonale en classe de sixième puis celle sur la symétrie centrale en classe de cinquième.

Le dispositif choisi avec le type de procédure de tracé qu'il induit apparaît comme un outil didactique favorisant l'apprentissage des notions de géométrie où intervient l'orientation.

Elisabeth GALLOU

Edgar MARKA

IREM de Grenoble

**BIBLIOGRAPHIE**

- GALLOU-DUMIEL E. (1988) symétrie orthogonale et micro-ordinateur.  
*Recherche en didactique des mathématiques* vol. 8 (1-2 p. 5-60)
- GALLOU-DUMIEL E. et MARKA E. (1988) *SYMREFLO*. IREM DE  
GRENOBLE.