

L'INFORMATIQUE EN MATHÉMATIQUES DES CALCULATRICES AUX ORDINATEURS

Michel FÉRAY

Pour un élève moyen, pour un enseignant moyen, l'informatique, c'est avant tout la calculatrice. Parce qu'il est impossible d'aller avec une classe d'une quarantaine d'élèves devant les ordinateurs, parce que la calculatrice est pour l'élève un outil d'usage courant. Bref l'ordinateur est à la calculette, ce qu'est le magnétoscope au livre, c'est chouette mais il y a rupture avec le travail quotidien. Autant l'apprentissage des calculettes se fond avec le cours de première, autant avec ma terminale que j'amenais régulièrement en salle d'informatique, j'ai eu l'impression de faire autre chose.

I. CALCULATRICES EN PREMIÈRE S

Pour la majorité des élèves de lycées, ceux qui ne font pas l'option, ce sera souvent leur seule formation. Le programme de Mathématiques est à ce sujet très limité : apprendre aux élèves à *programmer une fonction* mais les enseignants sont invités à *souligner le caractère algorithmique des méthodes et des résultats indiqués par le programme*.

La principale difficulté provient de la grande variété des calculatrices : certaines ne permettent que de programmer une fonction, d'autres bouclent systématiquement au début du programme, d'autres n'ont pas de conditionnelles, d'autres ont tout, y compris les sous-programmes mais disposent d'un nombre de pas si ridicule que l'on ne peut programmer sans bidouiller. Enfin certaines se programment en basic. Et je ne parle pas de la notation polonaise des HP.

Bien que l'on s'habitue rapidement aux calculatrices des élèves, cette diversité rend impossible des séquences de travail ayant pour objectif une notion informatique. Aussi -à part la programmation d'une fonction- plutôt qu'un cours, on saisira l'occasion de programmer.

Le cours de Mathématiques fourmille de formules aussi bien en analyse qu'en géométrie : second degré, déterminant, équation (le droite, produit scalaire. Elles vont nous permettre de créer nos premiers programmes. définir nos premières notions. Ceci se fait en plusieurs étapes bien précises

- Calcul algébrique pour obtenir la formule.

- Traduction de la formule sous forme d'algorithme. L'algorithme pourra être décrit sous forme d'organigramme ou dans un pseudo pascal très, très libre.

- Traduction de l'algorithme sous forme de programme : on insiste sur le coté un peu systématique -variable = registre, comment traduire l'affectation ? l'affichage ? la conditionnelle ?

- Tester le programme sur des valeurs simples. Cette première phase est très riche en réflexion

- Il vaut mieux entrer les données avant de lancer un programme ; entrer des données consomme beaucoup de pas de programme.

- On doit souvent modifier un algorithme pour l'adapter aux capacités de la machine.

- Certaines formules n'ont d'intérêt que dans la mesure où elles permettent d'écrire un programme et de traiter ainsi autant d'exercices que l'on veut.

- Mieux vaut rédiger le programme avant de l'entrer, cela évite de nombreuses erreurs. En particulier, certaines calculatrices ne permettant pas d'insérer des pas, une parenthèse ouvrante oubliée oblige à recommencer.

Les élèves prennent l'habitude à ce stade d'avoir leur mode d'emploi.

La deuxième phase consiste à savoir programmer une fonction. Comme c'est une partie du programme, on ne peut pas abandonner l'élève à lui-même. Toutefois grâce au travail préliminaire sur les formules, les élèves réussissent très vite. Il y a malheureusement toujours des exceptions. Pour certains, je ne connais pas d'autres solutions que d'être derrière eux, de les regarder programmer et de les critiquer tandis que les autres "s'occupent" avec d'autres exercices. Au total une séance assez houleuse, mais essentielle pour la suite. LES

ÉLÈVES DOIVENT SAVOIR PROGRAMMER UNE FONCTION et ils doivent le faire facilement.

L'algorithme est le suivant :

- 1 Entrez la valeur de x
- 2 Calculer $f(x)$
- 3 Afficher $f(x)$

L'algorithme se traduit ainsi :

- 1 R/S (arrêt pour entrer la valeur) Sto 0 (Registre 0 = x)
- 2 $f(Rcl 0)$ (calcul de $f(x)$)
- 3 R/S (arrêt pour affichage)

On peut améliorer le programme en éliminant la première instruction R/S sur la plupart des calculatrices. C'est la valeur affichée avant le lancement du programme qui est utilisée : la touche RUN est devenue une touche de fonction comme toutes les autres -du moins si l'on n'y regarde pas de trop près-, c'est à dire que pour calculer $f(3)$ on tape 3 Run comme l'on tape 3 Cos pour calculer $\text{Cos}(3)$.

Programmée ainsi, la fonction permet l'étude rapide des premiers termes d'une suite récurrente (u_0 donné, $u_{n+1}=f(u_n)$).

Enfin la troisième phase sera consacrée aux notions de boucles et de conditionnelles. Mais ces notions étant hors programmes, je perds moins de temps pour les élèves qui ont du mal à les programmer. Les conditionnelles - la résolution d'équation par dichotomie est une excellente occasion d'en faire - n'existent pas dans beaucoup de calculatrices ou sont si gourmandes en pas de programme que seules les basiques permettent de les programmer. Pour les boucles, on apprend à traduire systématiquement : Répéter 15 fois devient FOR ... NEXT en basic et se traduit par DSZ (Décrémenter d'un registre et Saut à Zéro).

Voici pour la partie technique de l'apprentissage des calculatrices. Les idées forces étant l'existence d'algorithmes relativement indépendant des machines et leur traduction systématique en programme - l'indépendance est toute relative puisque avec une boucle FOR ... NEXT, on préférera incrémenter le compteur, alors que sur une calculette, il faut essentiellement décrémenter le compteur.

Mais passons à ce qui semble le plus important : l'utilisation des machines en mathématiques. Ce qui suit n'a rien d'original, on le trouve dans beaucoup d'ouvrages mais l'expérience sur plusieurs années me permet d'en apprécier l'importance et l'intérêt.

1- Différence entre variable et paramètres. Lorsque l'on veut tracer des courbes paramétrées, on introduit la valeur du paramètre en début du programme, la valeur de x étant elle introduite avant de lancer le programme. Les élèves saisissent très nettement la différence entre les rôles de m et de x .

2- L'étude des fonctions est totalement bouleversée puisque l'on aura le tracé avant toute étude. L'élève pourra enfin devenir son propre correcteur et donc gagner en autonomie. Pour terminer, une fonction du type $f(x)=\sin(10 x)$ va lui permettre de "battre l'ordinateur" en découvrant plus de variations que prévues, ce qui justifiera a posteriori l'étude complète de la fonction.

3- La notion de limite est abordée également au travers des calculettes. De façon théorique, en la rapprochant de la notion de capacité des machines, de façon pratique en donnant des valeurs à ces limites. Attention, il faut bien faire comprendre aux élèves "qu'une hirondelle ne fait pas le printemps" et que $f(0,001)$ ne permet pas de donner la valeur de la limite. C'est la concordance des résultats de $f(0,1)$, $f(0,01)$, $f(0,001)$ qui donnera une idée de la limite. On peut se fabriquer pour l'occasion une bonne petite fonction mais $\ln(x)$ fait très bien l'affaire (à l'infini les élèves proposent comme limite du logarithme 5 voir 6). Nous voici près de la notion effective de limite.

Ces trois exemples ne sont pas limitatifs loin de là. Les programmes sont très utiles pour les suites. Le tout étant de ne pas laisser les élèves, de ne pas faire à tout moment de la programmation, d'une année sur l'autre je choisis d'autres champs d'applications. Mais je ne terminerai pas cette partie sans décrire une introduction aux notions de limite, continuité, dérivabilité qui a beaucoup impressionné la classe.

1- On rappelle la méthode de recherche par approximations successives.

2- On décrit l'algorithme de recherche par dichotomie.

3- Ceux qui ont des basiques écrivent un programme. Les autres programmeront la fonction et effectueront la recherche à la main.

4- On traite un ou deux exemples qui marchent.

5- Je leur propose une fonction discontinue $\tan(x/2) = 0$ pour x entre 3 et 4 convient très bien, vu le niveau en trigonométrie.

6- certains élèves annoncent froidement 3,14 mais il y a quand même des protestations.

7- Il ne reste plus qu'à remettre en cause le théorème de départ et à introduire les notions qui vont nous permettre de dépasser cette difficulté.

Il ne s'agit pas pour moi de faire douter les élèves de leur outil mais plutôt de leur montrer que c'est à travers des échecs que l'on progresse. La rigueur s'impose pour dépasser certains paradoxes.

II. TERMINALE C

Le travail en Terminale C est tout à fait différent puisque grâce aux heures de Travaux Dirigés, on peut aller devant des ordinateurs. Il faut alors autant faire découvrir des outils informatiques que les utiliser en mathématiques. Deux objectifs découvrir Multiplan et Turbo-Pascal (ce langage étant celui qui sera officiellement utilisé en classes préparatoires).

Pour Multiplan, les buts étaient :

- le raisonnement très spécifique sous forme de tableaux.
- l'utilisation des références relatives et absolues et de la fonction Recopie qui permet d'obtenir des tableaux en un temps record.
- la recherche de solutions optimales par tâtonnement.

Pour cela, les élèves ont eu à résoudre un certain nombre d'exercices :

- des problèmes d'optimisation avec des contraintes. En particulier des exercices classiques de seconde et première sur des problèmes linéaires.
- des calculs de moyennes de notes avec ou sans coefficients.
- le calcul des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal.
- des études de suites avec comparaison des vitesses de convergence ; en particulier des suites de Fibonacci.
- la méthode des rectangles pour calculer une intégrale.

La séance se déroulait ainsi :

1- Présentation du problème.

2- Proposition d'un tableau pour résoudre cette question. 3- Réalisation sur Multiplan.

4- Réflexion, recherche à partir du tableau.

Tous ces objectifs ont largement été atteints après six semaines de TD. Bien que les élèves aient en général été satisfaits de découvrir un logiciel connu, le bilan m'a plutôt laissé sur ma faim : quelques lignes de programme nous auraient permis d'obtenir les mêmes résultats. Comment dans ces conditions, un élève peut-il comprendre l'importance de ce logiciel ?

Puis nous avons abordé Turbo-Pascal. Le début du cours a été extrêmement lent : le langage très structuré a désorienté les élèves, en particulier ceux qui connaissaient le Basic.

La séance se déroulait ainsi :

1- Choix d'un problème.

2- Écriture d'un algorithme par les élèves.

3- Définitions des variables nécessaires et de leur type.

4- Écriture du programme.

5- Exécution, contrôle et, avec certains problèmes, de petits exercices pour justifier les résultats observés.

Outre les exercices d'apprentissage, les principales questions traitées ont été :

- Calcul d'une valeur d'une fonction, affichage du résultat.

- Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle.

- Résolution d'équations par différentes méthodes, comparaison des convergences.

- Suites et notamment suites de Fibonacci, suites homographiques.

- Calcul de l'intégrale d'une fonction : méthode des rectangles et de Simpson.

- Résolution approchée d'équation différentielle, comparaison avec la solution exacte qu'ils étaient capable de trouver grâce au cours.

- Calculs sur C : produit, racine, forme trigonométrique.

Au fil (les heures, l'intérêt s'est accru. Pour leur faire saisir l'importance du langage, son intérêt par rapport au basic, j'ai proposé pour terminer de faire un programme qui trace le graphe d'une fonction. L'algorithme a été étudié en classe, en commun. Puis j'ai écrit moi-même le programme dans la soirée en réutilisant une bonne partie des programmes qu'ils avaient écrits - notamment le calcul des extrema pour calculer l'échelle. Ils l'ont testé le lendemain et rajouté la résolution de l'équation $f(x)=0$. Le tracé de la fonction leur permettant de chercher visuellement l'intervalle $[a ; b]$ sur lequel se trouvera la solution. Ceci leur permettait d'utiliser la notion de procédure pour intégrer un programme dans un autre.

Les élèves ont été ravis, même si nos ordinateurs n'étaient pas graphiques et que certains d'entre eux ont des calculatrices graphiques offrant les mêmes possibilités. Heureusement car j'ai utilisé plus de la moitié de mes heures de Travaux Dirigés pour faire de l'informatique, ce qui est peut être formateur en mathématiques mais si loin (lu baccalauréat... Ceux qui ont des classes terminales comprendront ce problème.

Michel FÉRAY

Metz