L'ORDINATEUR POUR ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

Jean-Pierre ARCHAMBAULT

Le titre de cet article est avant tout celui d'un ouvrage collectif publié aux PUF sous la direction de Bernard CORNU. Sa lecture, que nous recommandons vivement, nous fournit l'occasion, sous la forme des notes qui suivent, de faire un point sur les multiples, et souvent étroites, relations existant entre les deux disciplines. (cf. rubrique "nous avons reçu").

Informatique et mathématiques, ce genre de problématique se décline marqué des sceaux conjugués de la diversité et des grands nombres, tant l'informatique irrigue chaque jour davantage les activités et la vie même de la société. Les disciplines, leurs objets, leurs concepts, leurs méthodes et leurs outils se trouvent ainsi de plus en plus interpellés et engagés dans des processus de mutations plus ou moins profondes. D'entrée signalons une singularité essentielle : des liens conceptuels étroits unissent les mathématiques et l'informatique, cette dernière utilisant de plus en plus les objets et les méthodes des premières, et inversement. Et cela amène B. CORNU à nous dire que "la frontière entre les deux est difficile à définir... si elle existe". Nous y reviendrons.

DES SIMILITUDES ET DES SPECIFICITES

Le contexte global d'intégration des mathématiques dans l'enseignement ressemble, à s'y méprendre, à celui des autres disciplines. D'un établissement à l'autre, avec des nuances et quelquefois plus, on rencontre les mêmes contextes matériels, des types identiques de situations pédagogiques, des effectifs d'élèves comparables et les problèmes que cela pose, des politiques de formation impulsées par les MAFPEN...

On trouve les mêmes grandes modalités d'utilisation de l'ordinateur : tableau noir, stations individuelles dans des salles spécialisées, ressource au CDI, outil de travail personnel à la maison, recours généralisé à la "petite soeur" calculatrice de poche. Dans les années à venir deux technologies devraient contribuer à donner une nouvelle impulsion dans les établissements scolaires : le réseau informatique et l'ordinateur portable à "prix abordable". Le réseau facilite, dans le temps et dans l'espace, l'accès à des ressources importantes et variées. Il permet d'offrir aux utilisateurs un environnement homogène sur l'ensemble d'un parc de machines.

Les professeurs de mathématiques, quant à eux, disposent d'une large panoplie de logiciels. Il y a d'abord les langages de programmation (Pascal, Basic, LSE, Prolog) dont l'utilisation influe sur l'apprentissage des mathématiques. Il y a aussi les nombreux logiciels de calculs numériques, pour résoudre des équations par exemple, ou symboliques, pour dériver et intégrer. Les logiciels graphiques, traceurs de courbes ou de dessin géométrique (Cabri-Géomètre), sont très prisés. Parmi les outils on doit mentionner également les tableurs, les systèmes experts pour, notamment, apprendre à résoudre des problèmes. Il existe des logiciels d'illustration et de simulation comme Les Imagiciels, des tutoriels pour des démarches individualisées, des banques de données d'exercices avec mots clefs se rapportant à leur contenu, aux notions en jeu, aux méthodes, à la difficulté, au niveau, au type d'apprentissage..., des outils d'évaluation, les traitements de textes scientifiques qui favorisent la communication, les hypertextes et hypermédias. Terminons par les micromondes, LOGO le plus célèbre, destinés à provoquer des apprentissages.

LES INFLUENCES DE L'ORDINATEUR

D'évidence la première influence provient des possibilités de calcul : il permet de calculer plus, mieux et plus vite. L'étude des nombres premiers a été relancée par le développement de la cryptographie ; on en a découvert d'extrêmement grands. L'ordinateur permet de visualiser des objets et des phénomènes très complexes, aidant à trouver de nouveaux résultats (on se reportera aux figures 1 et 2). On peut expérimenter, tester sur quelques exemples des phénomènes théoriques, en simuler d'autres trop coûteux, trop longs ou impossibles à réaliser. L'ordinateur aide à élaborer des conjectures. Si l'on ne peut pas dire que les mathématiques deviennent une science plus expérimentale, sans conteste, l'activité mathématique, elle, devient plus expérimentale.

On considère la fonction sinus et ses premiers polynômes de Taylor en 0 :

$$P_1(x) = x;\ P_3(x) = x - x^3/6;$$
$$P_5(x) = x - x^3/6 + x^5/120, \text{ etc.}$$

Si on trace leurs représentations graphiques, on observe que les polynômes de Taylor se confondent avec la fonction sinus sur un certain intervalle, puis la « quittent » soudain.

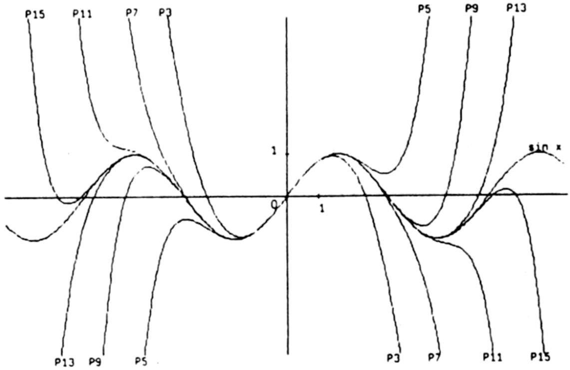

Fig. 1

$$| P_3(x) - \sin x |,\ | P_5(x) - \sin x |$$
$$| P_7(x) - \sin x |..., \text{ etc.}$$

On obtient la figure 2. On observe deux phénomènes : l'« équidistance » des courbes, et leur « parallélisme ». Ces phénomènes, que l'on retrouve avec d'autres fonctions usuelles, s'observent simplement, mais illustrent en fait des propriétés complexes de ces fonctions, et c'est la visualisation sur un écran d'ordinateur qui a permis de s'intéresser à ces phénomènes

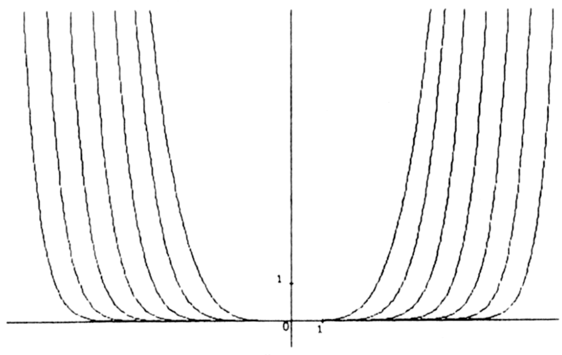

Fig. 2

La machine a fait évoluer le concept de démonstration en mathématiques, en dépit de naturelles réticences. On peut maintenant démontrer autrement qu'à la main grâce aux techniques de preuve de programme et avec l'exigence d'obtenir le résultat au moins deux fois de manières indépendantes. Le théorème le plus fameux ainsi établi est celui du coloriage de toute carte de géographie par au plus quatre couleurs. Grands nombres, calculs longs, multitude de cas particuliers constituent les opportunités privilégiées de démonstrations à l'aide de l'ordinateur.

Si l'on songe à l'algorithme d'Euclide on se persuade aisément que les algorithmes sont choses fort anciennes en mathématiques. Mais la possibilité de les mettre en oeuvre sur les ordinateurs en stimule la recherche de nouveaux. En 1983, Rice a montré que le produit de deux matrices nxn peut se faire avec environ $n^{2,49}$ multiplications au lieu de n^3, le nombre d'additions augmentant. Avec par exemple n=1000, $n^{2,49}$ représente un peu moins de 3% de n^3 : on imagine le gain, les multiplications consommant beaucoup plus de temps d'ordinateur que les additions. L'étude théorique des algorithmes, l'algorithmique, se développe. Il s'agit de les prouver en montrant que, ne bouclant pas, ils se terminent et qu'ils sont corrects, en procédant en général par assertion sur l'état du système de traitement après chaque action. Il faut également évaluer leur coût en espace et en temps. Par ailleurs, la preuve de l'existence de certains objets produits par des algorithmes revient à démontrer l'effectivité de ces derniers.

DES PRATIQUES MAIS AUSSI DES CONTENUS

La pratique mathématique évolue, mais il en va de même de certains concepts fondamentaux telles les notions de nombre, ne serait-ce que parce que l'ensemble des nombres que l'on peut traiter avec un ordinateur ne coïncide avec aucun des ensembles classiques. Les mathématiques discrètes prennent une nouvelle importance. Dans un premier temps les mathématiques ont considéré l'ordinateur comme un outil. Mais la situation s'est en partie inversée : l'informatique demande qu'on lui résolve des problèmes de calcul symbolique, d'algorithmique, de théorie des langages.

Toutes ces évolutions posent avec force la question des mathématiques à enseigner. La discussion bat son plein. Une vision plus expérimentale, plus numérique, plus algorithmique se dégage, sans pour autant mettre sous le boisseau l'approche structuraliste. Les programmes ont déjà intégré l'usage des calculatrices, des notions d'informatique. Tout ce mouvement ne va pas sans interrogations. Ainsi, en 1986, la Société de Didactique des Mathématiques indiquait : "Nous ne savons pas encore ce qu'impliquerait une réduction de l'entraînement à la pratique du calcul". Les réponses à venir s'élaboreront à la lumière des objectifs fondamentaux d'un enseignement des mathématiques : apprentissages d'outils, de résultats, de techniques mais aussi de méthodes, de façons de raisonner, de capacités intellectuelles. Et, ici comme ailleurs, la formation, initiale et continue, des enseignants à des éléments d'informatique et aux mathématiques telles qu'elles évoluent, constitue la clé de voûte de tout dispositif.

DIVERSES CONTRIBUTIONS

Cet ouvrage offre un panorama d'ensemble de "l'ordinateur dans l'enseignement des mathématiques". Il est aussi riche de diverses contributions sur des questions essentielles. Il est hors de question, dans le cadre imparti à ces quelques notes, d'en rendre compte exhaustivement. Aussi nous contenterons-nous de quelques touches.

L'INFORMATIQUE, C'EST QUOI ?

Analysant les rapports existant entre l'informatique et les mathématiques, J.P. BERTRANDIAS pose la question, et c'en est assurément une bonne, de la nature de la première nommée. Par ses aspects théoriques, elle est une science dont l'objet est l'information et la manière dont celle-ci peut s'élaborer, se transmettre, se conserver, se traiter. Mais, l'information devant toujours être matérialisée, les opérations à l'instant évoquées impliquent des actions réalisées par des machines et l'on peut alors considérer l'informatique comme la technique construisant et utilisant ces machines.

Cette matérialisation et ces actions fondent des différenciations. Dans les deux disciplines, une variable constitue une liaison entre un symbole et une valeur pouvant varier dans un ensemble donné. En informatique on doit matérialiser la liaison entre le nom et la valeur, d'où la notion de référence à une case. En mathématiques on change rarement l'association nom/valeur au cours d'un calcul alors que l'action d'affectation change la valeur associée à un identificateur. Il en découle une nécessaire prise en compte de la chronologie, de l'état des cases et donc une autre démarche de pensée. Le traitement de l'information consiste à passer de certaines informations appelées données à d'autres nommées résultats. On peut l'envisager de deux points de vue qui ne se confondent pas : action sur des données qui produit des résultats ou fonction qui, à des données, fait correspondre des résultats. En définitive, des ressemblances mais aussi des dissemblances.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Traditionnellement les élèves éprouvent des difficultés en analyse : l'infini intervient et provoque une certaine perplexité, une limite, cela s'atteint ou pas, comment être sûr de l'existence d'un nombre quand on ne peut pas le calculer... Chaque enseignant s'est sérieusement questionné sur la meilleure manière d'exposer en début de cours la notion de limite. Comment éviter de donner de l'analyse une image mentale de "répertoire de modèles de comportements imitatifs" ? Comment ne pas faire ressentir les arguments formels comme des inconséquences compliquées ?

Si l'on considère par ailleurs que "l'on a réellement compris un processus mathématique si l'on est capable de programmer une machine pour l'exécuter", il est alors judicieux d'aborder le concept de limite comme un outil de calcul de nombres en faisant, par exemple, écrire un programme de résolution d'une équation du second degré s'appuyant sur la méthode de Newton.

La structure profonde de la dérivation contient la notion de "platitude locale". D. TALL en propose une approche graphique. Avec des forts grossissements on voit que de petites portions des courbes les plus fréquents se rapprochent de droites (figure 3) ; mais on s'aperçoit aussi que, quel que soit le grossissement, il arrive qu'il n'en soit pas ainsi (figure 4).

A partir de graphismes dynamiques on établit progressivement des liens entre les aspects numériques, graphiques, symboliques et formels de la question. La même démarche vaut pour l'intégration, les équations différentielles.

Ne nous méprenons pas. On ne s'égare pas vers des espèces de sous-mathématiques mais on construit les bases d'une compréhension intelligente, on offre un support cognitif aux étapes initiales, ménageant ainsi une voie royale à la preuve formelle qui vient à son heure. Attention cependant à l'arithmétique de l'ordinateur qui peut parfois jouer de vilains tours.

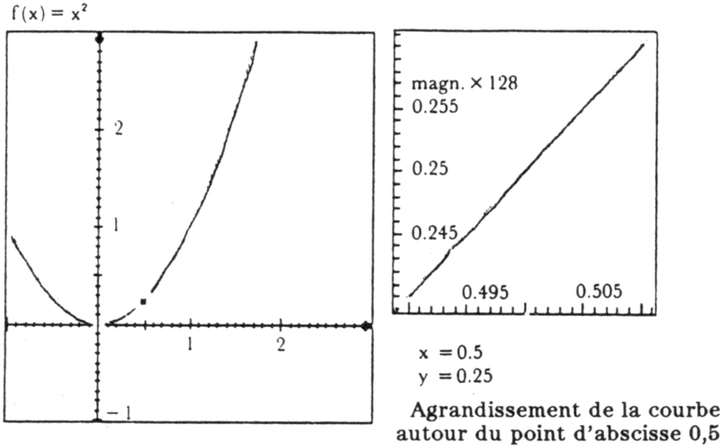

Fig. 3

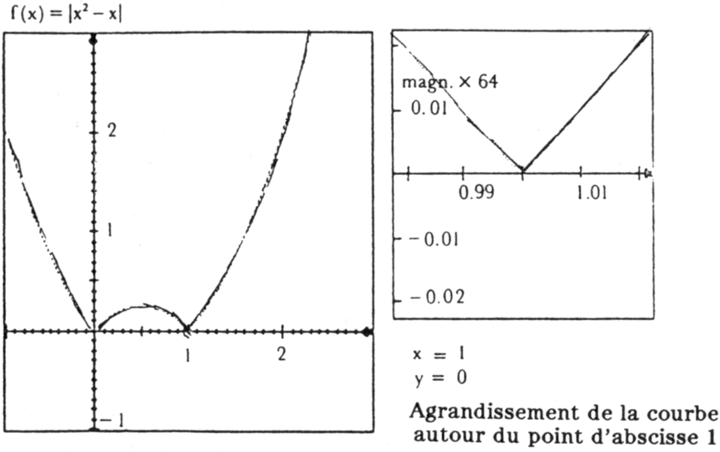

Fig. 4

LES OBJETS INFORMATIQUES

Traitant de l'intégration et de la viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Y. CHEVALLARD mentionne le contraste entre la rapidité et le degré de pénétration des objets techniques nouveaux dans les pratiques sociales les plus diverses d'une part, et dans le système éducatif d'autre part. Il insiste sur le statut et la légitimité des usages qui varient d'une discipline à l'autre. Et de l'illustrer par l'utilisation de la calculatrice, sans état d'âme particulier chez les physiciens ou chez les épiciers, "qui n'ont pas tenu congrès sur ce thème" : le statut didactique, aide au calcul, ne se discute pas. Il n'en va pas de même en mathématiques. A chacun ses tourments : vous aurez bien la preuve, si vous vous entretenez avec le professeur de Physique ou de Sciences naturelles, de la relation existant entre simulation et expérimentation. Proposant de dépasser les scénarios de recours à l'outil, les évolutions des contenus à enseigner, les pratiques du "professeur-artisan" qui produit des matériels didactiques et les consomme lui-même, se méfiant d'une survalorisation du nouveau au détriment des permanences, il appelle à un vaste effort d'ingénierie didactique.

PIAGET ET LA PROGRAMMATION

Si l'on veut maîtriser les effets de l'ordinateur sur l'apprentissage, mieux vaut s'appuyer sur une théorie de l'apprentissage, nous conseille en substance E. DUBINSKY. Il propose d'exploiter "les similarités structurelles frappantes entre beaucoup de processus de construction cognitive développés par PIAGET et certaines activités mentales impliquées dans l'écriture de programmes informatiques" ("que voilà un iconoclaste", ne manquera-t-on pas de s'exclamer, ici ou là). PIAGET a introduit le concept d'abstraction réfléchissante. Citons l'assimilation généralisante, ce qui se produit quand un nouveau phénomène peut être assimilé à un schème déjà existant (schème : ensemble plus ou moins cohérent d'objets mathématiques, nombres, fonctions, propositions, et d'opérations que le sujet est capable de faire avec ou sur eux). On décompose le processus d'acquisition d'un concept mathématique en différentes étapes. Cela en apprend beaucoup sur l'ordre dans lequel l'on se doit d'aborder certaines notions. La machine permet de donner à l'élève un rôle actif dans la construction de son savoir : il illustre des concepts abstraits sur l'ordinateur et se les concrétise dans son esprit car il écrit le programme, dans un langage proche du langage mathématique. Cette contribution est indéniablement intéressante, même si la vision du futur que son auteur nous propose semble quelque peu idyllique et utopique.

ET ENCORE

A longueur d'année, d'une manière répétitive et plus ou moins rationnelle, le professeur opère des choix d'exercices, d'activités, de problèmes. L'ouvrage contient la présentation d'une banques de données multicritères qui aide à mettre en relation et en cohérence un ensemble d'exercices et de problèmes, une évaluation diagnostique de l'élève et une prescription individualisée.

Vous pourrez également lire un article de F. TREHARD sur la classification des logiciels et l'impact d'une typologie sur l'élaboration de séquences d'enseignement et la conception même des logiciels. Derrière les querelles de langage s'en cachent souvent d'autres sur des théories de l'apprentissage ou des conceptions éducatives. Classique. Et puis un tel ouvrage ne saurait se concevoir sans une réflexion sur LOGO. A. ROUCHIER s'en charge.

Nous n'avons pas tout dit sur ce riche ouvrage. Alors...

Jean-Pierre ARCHAMBAULT
MAFPEN CRETEIL