UTILISATION DE DIDACTICIELS EN MATHÉMATIQUE (suite et fin)

Jean-Louis FROT, Bernard MESSÉANT

Ce texte fait suite à celui paru dans l'avant-dernier bulletin de l'EPI (cf. (1)).

Nous présentons brièvement :

– notre tentative d'étendre à la géométrie le modèle de représentation des connaissances élaboré en algèbre pour le logiciel Pépin,

– le renversement de la "Problématique" qui en est résulté,

– l'expérimentation grâce au logiciel Géou, des nouvelles hypothèses posées.

1 CADRE INITIAL DE L'EXPÉRIMENTATION

En mai 1985, nous soumettions à l'ancienne D.L. le projet suivant :

– 1. Définition d'une typologie d'exercices en géométrie niveau lycée.

– 2. Recherche d'une progression permettant l'appropriation par les élèves des transformations planes.

– 3. Recherche de démarches algorithmiques pour résoudre les exercices de géométrie.

Ces 3 titres délimitent un sujet très vaste, très ambitieux. Ce projet était dicté à l'origine par une évolution logique de notre travail antérieur qui portait sur un modèle de représentation des connaissances en mathématique. L'extension de ce modèle à la géométrie était en fait l'un des buts de notre expérimentation. On va voir comment ce projet a été transformé pour des raisons à la fois théoriques (spécificité de la géométrie) et méthodologiques (nécessité d'un outil pour expérimenter).

Au terme du travail mené en 85/86, nous sommes parvenus à la conclusion suivante :

Il est plus pertinent d'inventorier les méthodes et les modes de résolution utilisés en géométrie que de créer une typologie o¨ chaque type d'exercice ne contiendrait presque sûrement qu'un seul exercice et o¨ les liens entre types seraient très énigmatiques.

Autrement dit, il faut porter l'accent sur les étapes de démonstration à l'intérieur des exercices et dans ce but, un SYSTEME EXPERT nous semble être, à moyen terme, l'outils indispensable en géométrie. Ceci nous a conduit à amplifier le thème n°3 de notre recherche au cours de l'année 86/87.

Revenons maintenant au C.-R. de l'expérimentation 85/86. Dès le commencement, se sont posées à nous les deux questions suivantes :

- 1. Qu'est-ce qui fait l'originalité de la géométrie par rapport à l'algèbre par exemple ?
- 2. La notion de type d'exercices existe-t-elle en géométrie ?

2. ANALYSE CRITIQUE D'UNE TYPOLOGIE D'EXERCICES

2.1 En algèbre

En algèbre, on utilise principalement les nombres entiers dont les propriétés sont riches et variées : divisibilité, nombre de facteurs premiers, carrés parfaits, signe etc. Les exercices qui portent sur des paramètres entiers peuvent donc être aisément regroupés en classes suivant les propriétés des entiers qui y interviennent. D'une classe à l'autre, les techniques de résolution sont assez différentes et les étapes de calcul mettent en jeu des règles spécifiques. Il est dès lors aisé de créer des exercices ne faisant intervenir qu'une partie de ces règles : ces exercices se trouvent être naturellement des ascendants des exercices de la classe considérée. Bien entendu, des critères de choix pédagogiques interviennent aussi pour classer les ascendants et déterminer les plus pertinents.

2.2 En géométrie

Les objets de la géométrie pure tels que points, droites, cercles etc. sont en fait des modèles d'objet. Ainsi, dans l'ensemble des droites, tous les éléments ont exactement les mêmes propriétés. Un exercice de géométrie pure ne porte que sur un nombre fini de tels objets et il n'y a pas de constante en géométrie pure dont les valeurs pourraient servir de paramètres pour définir des sous-classes d'exercices.

Naturellement, il existe des classifications d'exercices en géométrie ; elles sont d'ailleurs nombreuses, la plupart basées sur les outils de résolution mis en oeuvre : transformations planes, angles, vecteurs etc. C'est ainsi que sont souvent classés les exercices dans les manuels d'enseignement.

Cependant ces classifications n'induisent aucun lien didactique entre les classes d'exercices et il est peu d'exemples de chaînage d'exercices conduisant d'un exercice "facile" à un exercice "difficile" au sens (1) n°2.1 et 2.1.1. Ceci explique en partie les difficultés d'apprendre la géométrie.

2.3 Une approche différente

Fort heureusement, il existe - pensons-nous - une parade à cette absence de graphe didactique ; cette approche que nous proposons n'est certainement et malheureusement pas infaillible mais son efficacité est attestée par les expérimentations que nous avons menée

Il y a deux aspects :

– 1. Promouvoir des moyens techniques permettant à l'élève d'acquérir une bonne connaissance:
  - a) des définitions géométriques,
  - b) des quelques règles, théorèmes et techniques de base en démonstration,
  - c) des effets des transformations géométriques sur une figure.
– 2. Assurer à l'élève qui résout un exercice - et sur sa demande - un minimum d'aide, de conseil et de sollicitations pour le guider dans une voie de résolution de son exercice.

Nous allons maintenant décrire les moyens que nous avons mis en oeuvre pour tenter de réaliser cette approche visant à favoriser la résolution d'exercices en géométrie.

3 DÉMARCHE MÉTHODIQUE EN GÉOMÉTRIE

3.1 Les exercices

Une figure de géométrie est un ensemble d'objets géométriques élémentaires tels que points, droites, cercles etc. liés par un ensemble de relations qui constituent sa définition. Un exercice consiste à établir et démontrer des relations entre certains éléments d'une figure.

3.2 Nos hypothèses de travail

3.2.1. Première hypothèse

Il faut inciter l'élève à traduire les situations géométriques d'un énoncé d'exercice en termes de relations élémentaires entre objets géométriques simples. Ceci le conduit à expliciter toutes les hypothèses de l'énoncé ; y compris celles qui sont implicites ou résultant de définitions qu'il connaît mal (hauteurs, médianes, bissectrices etc.) ; le cas échéant, l'élève doit réapprendre ces définitions.

Nous pensons que cette phase d'explicitation et de déclaration complète des hypothèses est une condition nécessaire pour résoudre un exercice de géométrie. Dans bien des cas, elle est aussi suffisante, car le résultat à prouver résulte souvent de l'application d'une seule règle dont l'énoncé est connu des élèves et dont les prémisses s'obtiennent par une combinatoire très simple sur l'ensemble des hypothèses.

3.2.2. Deuxième hypothèse

Si l'élève peut obtenir aisément plusieurs figures exactes pour un même énoncé (en variant la position de certains objets) il est alors à même de discerner les relations fortuites supposées exister entre certains objets de la figure et celles nécessaires, résultant des hypothèses de l'énoncé. Il peut ainsi éviter des tentatives infructueuses, visant à démontrer des propriétés fausses, et qu'il n'était pas évident de reconnaître comme telles. Inversement, on peut penser que ceci permet aussi de dégager de la figure des propriétés vraies que l'élève va pouvoir démontrer et qui peuvent être des intermédiaires pour résoudre l'exercice.

3.3 Le dispositif expérimental

Dans le but de doter l'élève d'un outil imposant une analyse rigoureuse des énoncés et favorisant la construction des figures, nous avons élaboré un logiciel expérimental de nom GEOU.

3.3.1. Description du logiciel GEOU.

Les différents objets d'une figure sont nommés et définis par des propriétés qui les lient à certains des objets déjà définis. Les objets retenus sont de type point, droite, cercle, demi-droite, segment. Pour faciliter l'expérimentation, nous avons limité à 7 le nombre des modes de définition de chaque type d'objet.

Les définitions de points

- Point quelconque dans le plan (saisi au crayon optique)
- milieu de 2 points
- intersection de 2 droites
- intersection d'une droite et d'un cercle (en précisant)
- intersection de 2 cercles (en précisant)
- Point sur une droite (pointé au crayon optique)
- Point sur un cercle (pointé au crayon optique).

Les définitions de droites :

- droite passant par 2 points
- issue d'un point et parallèle à une droite
- issue d'un point et perpendiculaire à une droite
- horizontale issue d'un point
- verticale issue d'un point
- médiatrice de 2 points
- bissectrice de 2 demi-droites

Les définitions de cercles

- cercle passant par 3 points
- de centre donné et passant par un point

Les définitions de demi-droites

- demi-droite issue d'un point et passant par un point

– issue d'un point et parallèle à une demi-droite
– bissectrice de 2 demi-droites

L'unique définition des segments :

– segment joignant 2 points

Pour définir un objet, on indique son type par une abréviation.

PO (point), DR (droite), CE (cercle), DD (demi-droite), SE (segment),

Puis son NOM : toutes les lettres sont possibles, primées ou non, les minuscules sont réservées aux demi-droites :

exemples : PO A', DR AB, DR D, CE O', DD Oy', SE A'B.

Ceci se fait en une seule frappe sur la ligne de commandes (lignes 25). Si la commande est erronée (erreur de syntaxe ou autre), un message s'affiche sur la ligne des messages (ligne 1). En cas d'erreur, on modifie la commande tapée. Ensuite 2 cas se présentent :

– un objet de même nom est déjà défini et on va le modifier.
– l'objet est nouveau et on va le définir.

Les modes de définition sont symbolisés par des icônes disposées en bandeau vertical à droite sur l'écran. Le choix d'un mode et sa validation se font au crayon optique. On remplit ensuite les rubriques de la définition avec les noms des objets en relation avec le nouvel objet. On indique enfin si l'on veut on non l'affichage de l'objet : en effet, un objet peut être défini sans nécessairement apparaître à l'écran et ceci facilite les constructions auxiliaires.

L'objet est alors calculé et tracé s'il y a lieu.

Remarques :

La figure se construit ainsi objet après objet.

Si l'on pointe à l'écran une zone proche d'un point déjà défini, son étiquette s'inscrit en rouge sur la figure près du point.

Lorsque l'on redéfinit un objet, on travaille en amont du dernier objet défini. Si la nouvelle définition modifie l'état antérieur de l'objet la figure se redessine. On peut ainsi voir comment elle évolue sous de petites modifications de certains de ses éléments ; accessoirement, on peut aussi améliorer de cette façon la mise en page.

3.3.2 Protocole d'expérimentation

Les expérimentations ont eu lieu en mai et juin 1986. Elles ont fait intervenir une dizaine d'élèves de classes de 4ème, 2nde et 1ère. Chaque élève met environ une heure pour se familiariser avec l'outil GEOU : puis un exercice lui est proposé. Il doit alors faire la figure et résoudre.

3.3.2.1 Les difficultés techniques

Les séances d'initiation ont fait apparaître certaines difficultés, le plus souvent masquées lors de séances de T.D. traditionnelles. Les unes sont d'ordre purement technique, les autres sont plus fondamentales et liées à la nécessité de traduire l'énoncé en terme de relations géométriques élémentaires ; certaines difficultés méritent qu'on s'y attarde :

1. L'ordonnancement séquentiel d'un énoncé de caractère systhétique

Dans la version prototype de GEOU il faut, pour définir un nouvel objet, avoir préalablement défini les objets paramètres de sa définition ; ainsi, on doit systématiquement retourner les énoncés du type :

– "soit D une droite passant par 2 points A et B

De même, l'énoncé :

– "2 cercles C et C' se coupent en A et B

se traduira par exemple ainsi :

–	PO O	crayon optique
–	PO O'	idem
–	PO A	idem
–	CE C	centré en O et passant par A
–	CE C'	centré en O' et passant par A
–	PO B	intersection de O et O' situé en bas (par exemple).

2. Les reports de longueurs

Les élèves, depuis les plus petites classes, ont l'habitude d'utiliser la règle graduée pour reporter les longueurs. Les principes de construction à la règle et au compas leur sont peu familiers : un élève de 1ère S, de niveau par ailleurs correct, a eu bien du mal à tracer un carré ABCD lors de sa séance d'initiation.

3.3.2.2 Satisfaction des élèves testés

Les élèves apprécient l'usage de primitives puissantes, qui donnent un résultat sans son cortège habituel de constructions auxiliaires.

Exemples : bissectrice de 2 demi-droites, médiatrice de 2 points.

On note également l'usage fréquent de "primitives de prédilection" chez certains élèves. Ainsi, en 1ère S, cet élève qui n'hésite pas à utiliser la bissectrice de 2 demi-droites pour tracer un carré, ce qui nécessite 13 pas de construction.

Les primitives puissantes ne sont pas sans une certaine part de risques : ainsi, la primitive cercle passant par 3 points ne nécessite la construction d'aucune médiatrice. Le cas échéant, si les 3 points forment un triangle rectangle, l'élève peut ne pas s'apercevoir que le cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse - ce qu'il aurait peut-être remarqué en construisant 2 médiatrices.

On ne voit pas très bien comment on pourrait diminuer cette part de risques, d'autant qu'elle nous semble largement compensée par de nombreux avantages. En particulier, ces primitives peuvent révéler certaines conséquences intéressantes des définitions : ainsi, pour obtenir un triangle rectangle AOB, de nombreux élèves construisent le milieu H de AB, puis le cercle de diamètre AB, enfin un point O quelconque sur le cercle ; d'o¨ il résulte immédiatement les égalités HA=HO=HB (cf. 4.2.2).

4 COMPTE RENDU DE 2 SÉANCES D'EXPÉRIMENTATION

4.1 Première séance

4.1.1 Énoncé de l'exercice

- 1 Soit I' et J' deux cercles de centre I et J se coupant en deux points distincts A et B.
- 2 Une droite issue de A recoupe I' en C et J' en D.
- 3 D se projette en E sur la parallèle à IJ issue de C.
- 4 Montrer que CE = 2 IJ.

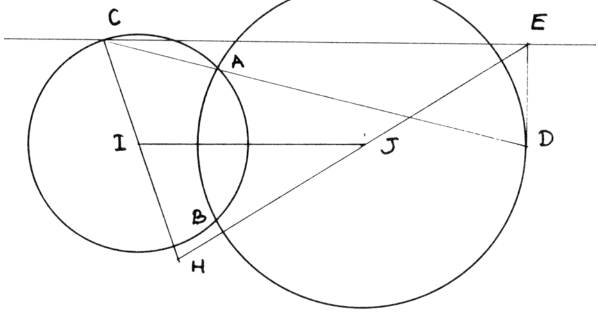
En fait cet énoncé est faux, comme on va le voir.

4.1.2 L'expérimentation :

Quatre élèves de classe de 1ère S se sont relayés pendant l'heure. Après avoir écouté un bref exposé sur le fonctionnement de Géou, les deux premiers élèves s'exercent à construire des points et un cercle ; puis cette première figure est effacée et ils construisent assez rapidement la figure demandée. Le troisième élève intervient alors et remplace les deux premiers ; le quatrième s'occupant plus particulièrement de l'étiquetage des points.

Le troisième élève à l'idée suivante :

Pour tester le résultat CE = 2 IJ, il construit les droites CI et EJ qui doivent se couper sur le cercle I' (appliquer la réciproque du théorème de la droite des milieux). Surprise ! cette construction donne un point d'intersection hors du cercle.

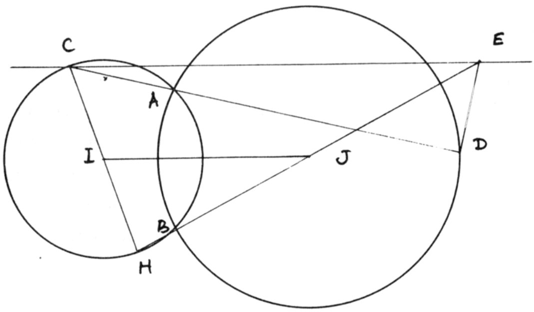


Désarroi de l'élève. Discussion entre les deux expérimentateurs. L'un évoque l'effet possible des arrondis successifs dans les calculs ; l'autre met en doute finalement l'exactitude de l'énoncé.

En fait, en refaisant la démonstration, il apparaît rapidement que l'énoncé est faux et on le rectifie ainsi

3' La perpendiculaire issue de D à CD coupe en E la parallèle à IJ issue de C.

L'élève redemande alors le point E, modifie sa définition, et la nouvelle figure apparaît, avec les droites CI et EJ se coupant exactement sur le cercle I'.



4.3.1 Figure

4.1.4 Conclusion

Les auteurs ne pensaient pas être eux-mêmes les 1ers bénéficiaires de leur 2nde hypothèse de travail.

4.2 Une autre séance

4.2.1 Enoncé

Soit AOB un triangle rectangle en O. Un cercle passant par A et B recoupe OA en A' et OB en B'.

1. Montrer que la médiane relative à O de AOB est hauteur de A'OB'.

2. Montrer que la hauteur relative à O de AOB est médiane de A'OB4.

4.2.2 Expérimentation

Nathalie est une élève qui éprouvait en début d'année d'assez grosses difficultés en mathématique. Un gros travail et beaucoup de courage lui ont permis de réaliser des progrès étonnants ; cependant, la géométrie reste son point faible en fin d'année. Face à Géou, elle ressent un mélange de crainte et de fascination ; les caprices du crayon optique la laisse cependant perplexe.

Il lui faut environ 1h30 pour se familiariser avec les modes de définition de Géou et la saisie des paramètres de définition d'un objet.

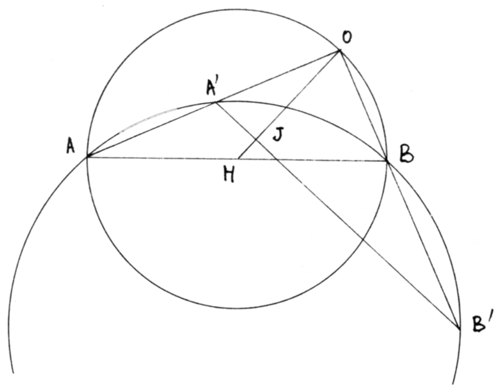
Ce qu'elle trouve particulièrement intéressant c'est de pouvoir retrouver aisément la définition d'un objet antérieur ; et aussi la possibilité de faire des essais de mise en page ; mais surtout, la facilité qu'on a d'examiner les différents cas de figures, simplement en modifiant un paramètre dans une seule définition : tout se reconstruit automatiquement.

Nathalie se sert d'un cercle C de diamètre AB pour construire le triangle rectangle AOB ; ceci à l'avantage de faire intervenir le milieu de AB (point H) et le triangle AHO , isocèle en H. L'égalité des angles AA'B' et ABB' lui permet ensuite par supplémentarité de prouver B'A'O = ABO et enfin AOB = A'JO.

4.2.3 Première figure

Je pose la question suivante :

127



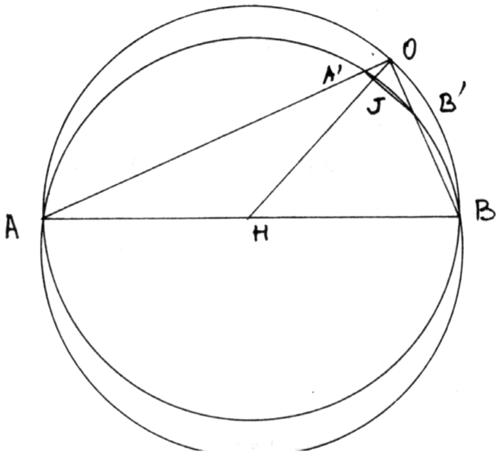
- "A-t-on toujours l'égalité AA'B' = ABB' ?"

Après avoir bien réfléchi, Nathalie répond :

- "Oui, si A' et B sont du même c¶té par rapport à AB' ; sinon..."

Par tâtonnement elle obtient un nouveau cercle C' passant par A et B, et pour lequel B' se trouve entre O et B. Après trois essais, une figure très lisible est obtenue. Nathalie est très surprise de voir la figure se reconstruire.

4.2.4 Deuxième figure



4.2.5 La démonstration

Malheureusement, la démonstration précédente ne convient plus. Je conseille à Nathalie de passer aux angles orientés : le théorème de l'angle inscrit donne : 2 (A'B', A'A) = 2 (BB',BA)

On a toujours (AB,AO) = (OA', OJ) et si on compare les angles restants de AOB et A'OJ, il vient : 2 (JO, JA') = 2 (OA,OJ) = PI donc (JO,JA') = +/- PI/2

4.2.6 Conclusion

Cet exercice sur les angles orientés est révélateur à la fois de leur puissance et de leur sophistication.

On voit aussi que les variations de figures sont un moyen efficace pour prouver la faiblesse d'une démonstration.

L'intérêt pédagogique est évident : sollicitée, l'élève a décelé l'hypothèse implicite de sa démonstration ; puis, bénéficiant d'une aide appropriée, elle a pu mettre au point une nouvelle démonstration.

Cet exercice peut être une bonne introduction à l'emploi des angles orientés comme outil de démonstration.

5 BILAN

Nous avons présenté en (2.3) les 2 aspects de notre approche pour favoriser la résolution d'exercices en géométrie ; rappelons-les :

- a) améliorer la compréhension des énoncés et mettre en évidence les conséquences immédiates des hypothèses.
- b) fournir à l'élève - en cas de besoin - l'aide qui lui est nécessaire pour mener à bien sa démonstration.

Faute d'outil expérimental suffisamment complet, nous n'avons exploré que le 1er aspect ; et encore nous sommes-nous passablement restreints, puisque les transformations géométriques n'étaient pas directement utilisables dans GEOU.

5.1 On a pu constater à la lecture des 2 comptes rendus, l'effet bénéfique de la nécessité d'ANALYSER et de DÉCLARER toutes les hypothèses contenues dans un énoncé de géométrie. En vue d'obtenir une forme exploitable de son énoncé, l'élève doit le traduire en une suite de relations élémentaires et directement représentables dans une figure. La figure elle-même se construit automatiquement, et les relations obtenues sont facilement utilisables dans une démonstration qui reste à produire.

5.2 Certaines relations fausses peuvent être détectées par TRANSFORMATION de la figure - ce qui se fait aisément avec Géou ; ceci permet à l'élève de ne pas s'attarder dans des efforts stériles pour démontrer ces relations fausses. Inversement, les transformations peuvent mettre en évidence des relations vraies.

Malheureusement, le nombre de relations vraies existant entre les objets de la figure est encore important, et l'élève dispose rarement des critères de choix qui lui permettraient de se frayer un chemin dans ce dédale relationnel et d'en revenir avec une démonstration. Il et alors à la merci des voies erronées et infructueuses dans lesquelles il peut s'égarer très longtemps - voir se perdre - mais aussi, et c'est le plus fréquent, il risque de se décourager lorsque le but à atteindre lui semble trop lointain.

Aussi pensons-nous qu'il est indispensable de se donner les moyens de développer le 2ème aspect de notre approche - l'aide différenciée - et ceci nous amène à la conclusion, déjà évoquée en (1).

5.3 L'outil qui permettrait, le moment venu, de donner à l'élève l'aide dont il a besoin, c'est un EXPERT en géométrie. Dans le cadre de la présente expérimentation, le rôle de l'expert était tenu par les expérimentateurs eux-mêmes (on aura noté que ce rôle a été réduit). Cependant, dans le cas d'élèves en difficulté, ce rôle est indispensable.

Se pose donc à présent le problème de la création et des modes d'utilisation d'un système expert en géométrie pure, et ceci débouche sur une nouvelle recherche.

Jean-Louis FROT, Bernard MESSEANT
Lycée Henri BERGSON Paris XIXè