

UNE INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTION UTILISANT LE LANGAGE LOGO

M.-A. EGRET, D. GUIN

INTRODUCTION

L'un des résultats essentiels de la psychologie cognitive consiste à avoir mis en évidence le rôle éminent de la résolution de problèmes dans le processus d'acquisition des connaissances. Nous avons émis l'hypothèse que l'informatique peut nous apporter une aide sensible dans cette démarche. Nous distinguerons deux domaines dans l'informatique éducative :

- l'activité de programmation (informatique "**objet**").
- l'informatique utilisée dans d'autres disciplines (informatique "**outil**").

Certaines opérations de pensée qui ne sont pourtant pas propres à l'informatique, peuvent avoir dans cette discipline un caractère nécessaire ou explicite : l'explicitation des procédures de résolution en est un exemple. Ce caractère explicite devrait être producteur d'acquisitions chez les élèves. Or les travaux des psychologues [PEA R.D., KURLAND D.M. (1984)] mettent en évidence que l'apprentissage de la programmation (informatique "objet") n'a d'influence sur le développement général de la connaissance que s'il est d'assez haut niveau : c'est pourquoi, nous avons travaillé avec des élèves ayant déjà une certaine expérience informatique [DUPUIS C., EGRET M.-A., GUIN D. (1985, 1987)].

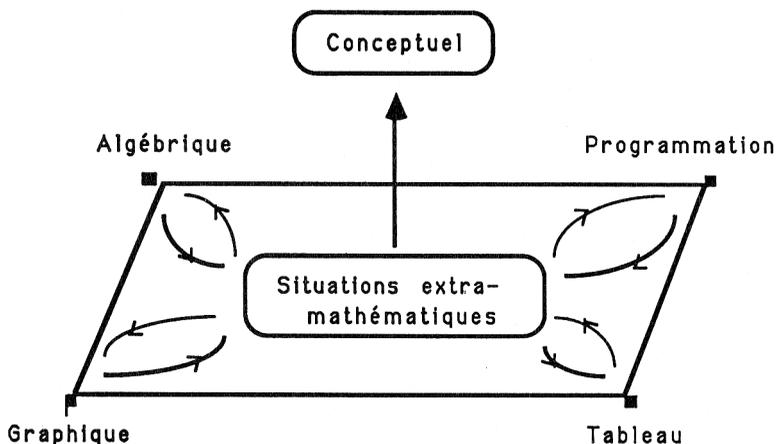
Dans une perspective d'utilisation du micro-ordinateur dans l'Enseignement des Mathématiques, nous sommes amenées à nous poser la question suivante :

Est-il possible d'associer la programmation et l'utilisation de logiciels afin d'obtenir une meilleure compréhension des notions mathématiques ?

Nous avons tenté de répondre à cette question en ce qui concerne l'introduction de la notion de fonction en classe de 3ème. Nous avons choisi le langage LOGO, car il facilite une approche de l'activité de programmation par la résolution de problèmes grâce aux procédures. En outre, puisque c'est un langage applicatif, il est particulièrement bien adapté à un travail sur les fonctions.

I NOS HYPOTHESES COGNITIVES ET DIDACTIQUES

I. Guzman distingue dans la notion de fonction différents registres [GUZMAN I. (1989)] que l'on peut représenter de la manière suivante :



Nous considérons :

- a) d'une part les registres de traitement : algébrique (formules), graphique, tableau et programmation LOGO ;
- b) d'autre part les registres conceptuel (idée de correspondance) et situations extra-mathématiques (énoncés).

Notre objectif est donc de concevoir dès le premier contact avec la notion de fonction un enseignement dans les différents registres répertoriés et d'organiser entre ces registres un réseau relationnel en utilisant au mieux les deux aspects de l'informatique éducative : **il s'agit de construire des situations-problèmes favorisant les interactions entre les différents registres.**

Cette démarche est très éloignée de celle généralement adoptée dans les programmes jusqu'à cette année : l'enseignant donne la

M.A. EGRET, D. GUIN LE BULLETIN DE L'EPI

définition d'une fonction (correspondance entre deux ensembles); les exercices portent alors essentiellement sur :

- des calculs d'image à partir de l'expression algébrique d'une fonction.
- la représentation graphique à partir de l'expression algébrique d'une fonction.

Les liens entre les différents registres sont rarement explicités (par exemple le passage graphique -> algébrique) et les situations extra-mathématiques le plus souvent inexistantes.

Voici les hypothèses retenues en ce qui concerne la construction de la connaissance mathématique chez les élèves :

- 1) hypothèse constructiviste : la connaissance se construit dans l'action qui se traduit essentiellement en mathématiques par la résolution de problèmes.
- 2) l'utilisation de l'informatique "objet" dans l'enseignement des mathématiques nécessite une alphabétisation réelle en informatique [ROGALSKI J. (1985)].
- 3) une utilisation adéquate de l'informatique "outil" peut faciliter les passages entre les différents registres.

II NOS CHOIX DIDACTIQUES

1) Présentation de la notion de fonction comme une procédure liée à un tableau de valeurs.

Cette présentation met en jeu trois des registres de la fonction :

- le registre conceptuel (idée de correspondance)
- le registre tableau
- le registre programmation LOGO.

Cette présentation permet :

- l'introduction naturelle du vocabulaire relatif aux fonctions : image, antécédent, ensemble de départ, ensemble d'arrivée.
- la diversité d'exemples (situations extra - mathématiques).

2) *Manipulation de la notion de fonction :*

- avec des exemples aussi variés que le permet le programme scolaire de la classe de troisième (fonctions affines, constantes, linéaires, affines par intervalles).
- par des recherches de fonction cachée [LÉRON U., ZAZKIS R. (1986)] : il s'agit de déterminer, grâce à une manipulation sur micro-ordinateur de différentes valeurs de la variable, la procédure-fonction.

Cette activité met en jeu les registres suivants :

- le registre tableau
- le registre algébrique
- le registre situations extra - mathématiques.

3) *Présentation de la représentation graphique d'une fonction comme l'exécution d'une procédure représentant l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. Cette activité met en jeu les registres suivants :*

- le registre tableau
- le registre algébrique
- le registre situations extra - mathématiques
- le registre programmation LOGO
- le registre graphique.

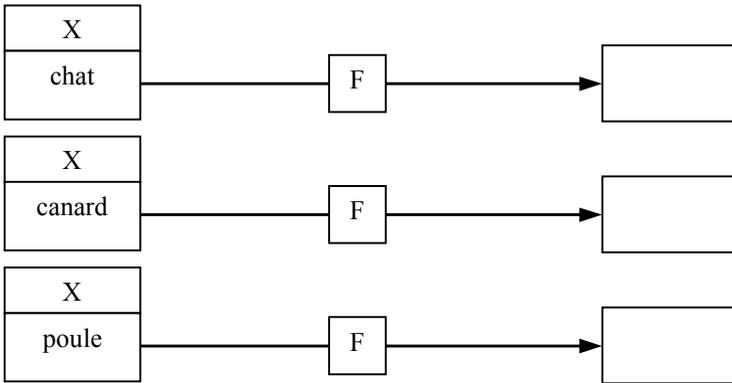
Ce traitement permet de mettre en évidence le rôle des paramètres a et b dans l'expression $f(x) = ax + b$ à travers la variation systématique de ces paramètres.

III PRESENTATION DES SEANCES

Cette expérimentation a été menée dans une classe de 3^{ème} (20 élèves de 14-15 ans) avec la participation de l'enseignante de mathématiques. Elle intervient après un enseignement d'informatique d'une heure hebdomadaire sur plus d'une année scolaire (environ quarante heures). Les 15 séances se sont déroulées sur une période de 4 semaines. La classe disposait de 8 micro-ordinateurs.

1. Extrait de la fiche 1

F: fonction "longueur du mot":



- Trouver les images par F des mots : chat, canard, poule.
- Donner la procédure qui permet d'obtenir pour un mot son image par F ?
- Compléter le tableau de valeurs :

X	chat	canard	poule	chien	cigogne	éléphant	marmote
F(X)							

- Y a-t-il des mots qui ont la même image ?
- A quel ensemble appartiennent les images ? (Cet ensemble est appelé ensemble d'arrivée.)

2. Pour chaque exercice

- Ecrire une procédure-fonction qui permet d'obtenir pour un élément son image par la fonction F qui est donnée.
- Faire un tableau de valeurs.
- Indiquer l'ensemble de départ de la fonction F.
- Indiquer l'ensemble d'arrivée de la fonction F.
- Y a-t-il des éléments qui ont la même image ?

* F : fonction "reste dans la division par 3".

* F : fonction "valeur absolue".

* F : fonction "doubler la liste".

* F : fonction "doubler la première lettre".

- * La rémunération mensuelle d'un représentant de commerce E est calculée de la manière suivante : il perçoit une rémunération égale à 40% du montant des ventes mensuelles qu'il réalise. F : fonction "rémunération de E". (F : fonction linéaire)
- * Un deuxième représentant G perçoit un salaire mensuel fixé à 3 000 f auquel s'ajoute 15% du montant de ses ventes mensuelles. F : fonction "rémunération de G". (F : fonction affine)
- * Un troisième représentant H perçoit un salaire mensuel fixé à 5 500 f. F : fonction "rémunération de H". (F : fonction constante)
- * Dans une ville V, le tarif de stationnement pour un véhicule est le suivant :
F : fonction "tarif dans V". (F : fonction constante par intervalles)

temps en minutes	< 30	30 à 60	60 à 90	90 à 120	120 à 180
Prix en francs	2	3	4	5	6

- * Dans une autre ville W, le tarif du stationnement pour un véhicule est proportionnel à la durée (en heures) et est de 3 f par heure. F : fonction "tarif dans W". Quel est le type de cette fonction ?
- * F : fonction "agrandissement double, point O fixe."
- * Un piéton, un automobiliste et un cycliste partent de Strasbourg au même moment avec des vitesses respectives de 5 km / h, 72 km / h et 18 km / h. F: fonction "distance parcourue".

3. fiche sur les fonctions cachées

Déterminer à l'aide du micro-ordinateur la fonction correspondant au tableau de valeurs incomplet :

a) *Allongement d'un ressort :*

F_1	x	0,03	0,08	0,28
	$F_1(x)$	0,15	0,40	1,40

b) *Location d'une voiture :*

F_2	x	140	450
	$F_2(x)$	500	1275

c) Chute d'un caillou du haut d'une falaise :

F_3	x	1	2	5
	$F_3(x)$	2	8	50

d) Partie entière :

F_4	x	-2,5	2,4
	$F_4(x)$	-3	2

e)

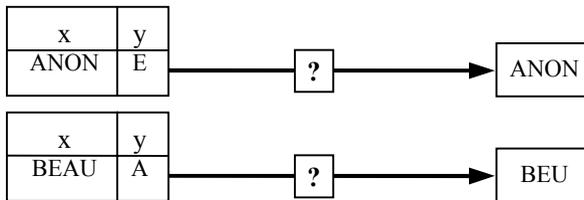
F_5	x	10	24
	$F_5(x)$	3,16227	4,89897

f) Fonction affine "par morceaux" :

La fonction cherchée est affine sur chacun des intervalles $]-1, -3]$, $[-3, 0]$ et $[0, +\infty[$.

F_6	x	-5	-3	0	7
	$F_6(x)$	3	1	1	8

g)



4. Fiche représentation graphique d'une fonction

Dessiner la représentation graphique d'une fonction F , c'est représenter dans un repère (O, I, J) du plan, l'ensemble des points de coordonnées $(x, F(x))$.

Les exercices suivants sont à faire sur micro-ordinateur :

Exercice 1 : en utilisant les procédures REPERE et GRPOINT :L (L est la liste des coordonnées d'un point, représenter graphiquement sur ordinateur les fonctions F_2 et F_3 (fiche 2). Que pensez-vous de la représentation graphique d'une fonction affine ?

Exercice 2: en utilisant les procédures REPERE et GRFPOS :L, écrire une procédure DROITE :L1 :L2 permettant d'obtenir le tracé de la droite passant par deux points quelconques du plan. (L1 et L2 sont les listes des coordonnées des deux points)

exemple : DROITE [5 4] [3 2]

Exercice 3 : en se servant de la question précédente, écrire une procédure AFF :A :B permettant d'obtenir la représentation graphique d'une fonction affine F. (F fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par $F(x) = Ax + B$).

Exercice 4 : on considère les fonctions affines obtenues en choisissant pour A une valeur (par exemple $A = 2$) et en faisant varier B ($B = 0, B = -1, B = 1, B = -2, B = 2, B = -3/2, B = 3/2 \dots$). Représenter graphiquement ces fonctions (une dizaine) dans un même repère et présenter dans un tableau des remarques.

Exercice 5 : on considère maintenant les fonctions affines obtenues en choisissant pour B une valeur (par exemple $B = 1$) et en faisant varier A ($A = 0, A = -1, A = 1, A = -2, A = 2, A = -3/2, A = 3/2 \dots$). Représenter graphiquement ces fonctions (une dizaine) dans un même repère et présenter dans un tableau des remarques.

Exercice 6: Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

F1, F "rémunération de H", F "valeur absolue" et F6 (cf. fiche 1 et fiche 2).

IV LES PRINCIPAUX APPORTS DE L'EXPÉRIMENTATION

Un questionnaire a été soumis à une classe témoin et à la classe d'expérimentation; voici un aperçu des résultats obtenus [GUZMAN I. (1989)] :

- Si l'on observe le groupe des questions nettement mieux réussies dans la classe témoin, il s'agit essentiellement de celles concernant le registre **conceptuel** (reconnaissance d'une fonction à partir d'un graphique ou d'exemples extra-mathématiques) et les passages registre **situations extra-mathématiques** ou registre **graphique** <--> registre **conceptuel**.

- Si l'on observe le groupe des questions nettement mieux réussies dans la classe d'expérimentation, on constate qu'il s'agit de questions relatives aux manipulations de fonctions : essentiellement, des tâches de

production. Dans la classe d'expérimentation, la notion de fonction est perçue comme la **possibilité de calculer un objet en fonction de l'autre**. Les résultats révèlent l'effort fourni pour mettre en jeu tous les registres de la notion de fonction : par exemple, les tentatives des élèves pour trouver une correspondance entre la situation graphique et l'expression algébrique ne se manifestent pas dans la classe témoin (passage registre graphique -> registre algébrique); il est vrai que c'est surtout le passage inverse qui est travaillé généralement. Le vocabulaire fonctionnel par exemple les mots "fonction affine, linéaire, constante" etc... est plus utilisé que dans la classe témoin.

V DISCUSSION

Il semble donc que cet enseignement donne des résultats nettement meilleurs en ce qui concerne les tâches de production : nous pouvons émettre l'hypothèse que ces bons résultats sont dus à un travail actif sur les registres tableau, situations extra-mathématiques, programmation LOGO et les passages entre ces différents registres généralement peu développés dans l'enseignement.

L'année suivante, nous avons entrepris une deuxième expérimentation. Si nous comparons ces deux expériences, nous devons mentionner la différence suivante : les élèves concernés par la deuxième expérience n'avaient pas une formation approfondie au langage LOGO, nous n'avons donc pas pu mettre en jeu le registre programmation (fiche 1). Nous avons donc modifié nos situations didactiques en tenant compte des résultats de la première expérimentation et du fait que les élèves n'avaient pas un niveau suffisant pour travailler le registre programmation. Un travail spécifique sur le registre conceptuel et sur les passages de ce registre aux registres situations extra-mathématiques et graphique nous a paru nécessaire.

En conclusion :

- La première expérience donne de bons résultats pour les manipulations de fonctions et des résultats plus décevants sur le registre conceptuel.
- La seconde expérience permet une amélioration sensible des résultats sur le registre conceptuel, par contre nous notons une plus grande difficulté dans les manipulations de fonctions.

L'idée fondamentale que l'on peut dégager après ces expérimentations est la nécessité impérieuse d'une alphabétisation informatique pour pouvoir utiliser de manière significative la programmation dans l'Enseignement des Mathématiques.

Mesdames Marie-Agnès EGRET et Dominique GUIN,
I.R.E.M Strasbourg,
10, rue du Général Zimmer,
67084 Strasbourg Cedex

Ce travail a été mené dans le cadre du GRECO Didactique de l'informatique.

BIBLIOGRAPHIE

- DUPUIS C., EGRET M.-A., GUIN D. (1985) : Récursivité et Logo - 1. "*Préexpérimentation*", Ed I.R.E.M de Strasbourg.
- DUPUIS C., EGRET M.-A., GUIN D. (1987) : Logo - 3. "*Programmation structurée : présentation et analyse de situations*", Ed I.R.E.M de Strasbourg.
- GUZMAN-RETAMAL I. (1989) : "*Registres mis en jeu par la notion de fonction*", Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 2, p. 229-260, Ed I.R.E.M de Strasbourg.
- LERON U., ZAZKIS R. (1986) : "*Functions and variables, a case study of learning mathematics through Logo*". Proceedings of the 2nd International Conference for Logo and Mathematics Education, p. 186-192, Ed University of London Institute of Education.
- PEA R.D., KURLAND D.M. (1984) : "*On the cognitive effects of learning computer programming*", New Ideas Psychol., vol 2, n° 2 p. 137-168.
- ROGALSKI J. (1985) : "*Alphabétisation informatique, problèmes conceptuels et didactiques*", Bulletin de l'APMEP, n° 347, p. 61-74.